

POLITECNICO DI MILANO

I FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Dipartimento di Ingegneria Strutturale

PONTI STRALLATI. PROBLEMI DI PROGETTAZIONE DEGLI STRALLI.

Relatore:

Prof. Ing. Pier Giorgio MALERBA

Correlatore:

Ing. Manuel QUAGLIAROLI

Tesi di Laurea di:

Sara BOCUS

749934

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Bocus, S.
Ponti strallati. Problemi di progettazione degli stralli.
© Ottobre 2012.
sarabocus@gmail.com

Politecnico di Milano, *Dipartimento di Ingegneria Strutturale*
Sessione Laurea 4 Ottobre 2012

Nana korobi, ya oki

Sommario

Il lavoro è dedicato allo studio dei ponti strallati e, in particolare, alle problematiche relative alla determinazione del tiro degli stralli e alla scelta delle configurazioni sia geometriche sia di vincolo.

Al fine di comprendere il comportamento meccanico dello strallo, nella prima parte di questo elaborato viene esaminato il comportamento dei cavi, confrontando i risultati ottenuti con la teoria della catenaria elastica con quelli correntemente utilizzati nelle valutazioni tecniche di progetto, parabola e catenaria inestensibili.

Come verrà fatto notare, dal punto di vista tecnico i risultati sono ben confrontabili tra di loro e, quindi, consentono l'utilizzo di soluzioni approssimate. Dal punto di vista concettuale, lo studio di una fune con la teoria della catenaria elastica consente di cogliere in tutta evidenza l'evoluzione della rigidità del cavo al variare del suo livello di tensione, fino a tendere a quella di una biella.

All'interno di questo lavoro, questo comportamento viene messo in evidenza mostrando anche la dipendenza dal peso del cavo stesso.

La stessa relazione è poi nuovamente riproposta per il caso che più interessa i ponti strallati, quello del cavo inclinato.

Nella seconda parte si riprendono i principali criteri per la determinazione dei tiri negli stralli al fine di ottenere livellette di impalcato secondo predefinite condizioni di progetto. La prima, più diffusa, fa ricorso ad un metodo delle flessibilità.

Una prima applicazione di questo metodo è stato utilizzato per validare l'utilizzo delle bielle all'interno delle successive analisi.

Nell'ultima parte del lavoro si presenta il problema dell'ottimizzazione strutturale. Fra i tanti metodi a disposizione, si è scelto di utilizzare un algoritmo genetico, ispirato ai principi dell'evoluzione naturale darwinista. Si sono mostrate le potenzialità di un tale approccio risolvendo alcuni problemi caratteristici dei ponti strallati.

Per gli sviluppi algoritmici si è fatto ricorso a codici strutturali sviluppati in modo indipendente. Il programma che implementa l'analisi genetica è stato sviluppato anche esso in modo autonomo.

Per i confronti è stato utilizzato il software commerciale Straus7.

Indice

Sommario	vi
1 Introduzione	1
1.1 Storia	1
1.2 Tipologia e tecnologia	5
1.2.1 La disposizione degli stralli	5
1.2.2 Le antenne	5
1.2.3 Gli ancoraggi	6
1.2.4 L'impalcato	8
1.2.5 I cavi	9
2 Generalità sulle funi	13
2.1 Il dibattito sull'equilibrio funicolare	13
2.2 Considerazioni introduttive	16
2.3 Soluzioni analitiche	16
2.3.1 Catenaria inestensibile	16
2.3.2 La parabola inestensibile	18
2.3.2.1 Un caso particolare: appoggi allo stesso livello	21
2.3.3 Catenaria elastica	22
2.4 Confronti fra catenaria inestensibile e parabola	25
2.5 Confronti fra le catenarie	26
2.5.1 Catenaria elastica e catenaria inestensibile	26
2.5.2 Catenaria leggera e catenaria pesante	27
2.5.2.1 Catenaria orizzontale	28
2.5.2.2 Catenaria inclinata	28
2.6 Osservazioni conclusive	30
2.7 La flessione nei fili	31
3 La modellazione dello strallo e la determinazione dei tiri	35
3.1 Calcolo del tiro negli stralli	35
3.2 La modellazione dello strallo	37
3.2.1 Un esempio semplice: la mensola	37
3.2.2 Il ponte strallato	41
3.3 Sintesi dei risultati	48
4 Il codice genetico, ottimizzazione naturale	49
4.1 Formulazione del problema di ottimizzazione	49
4.2 Algoritmi genetici	50

4.3	Struttura dell'algoritmo	50
4.3.1	La popolazione	51
4.3.2	La selezione	51
4.3.3	Il crossover	52
4.3.4	La mutazione	53
4.4	La funzione obiettivo	53
4.4.1	Funzione Fitness	54
4.4.1.1	Scaling	54
4.5	Benchmarks	55
4.5.1	Ottimizzazione libera	55
4.5.2	Ottimizzazione vincolata	57
4.6	Una semplice applicazione	58
5	Problemi connessi alla valutazione dei tiri	63
5.1	I vincoli a terra	63
5.2	Il ponte preso in esame	65
5.3	La determinazione dei tiri	67
5.4	I minimi quadrati	69
5.5	Il sistema $n \cdot n$	69
5.6	La scelta dell'indicatore di riferimento.	72
5.7	La risoluzione con il codice genetico	83
5.7.1	La funzione fitness e i vincoli	84
5.7.2	Le variabili	84
5.7.3	La soluzione	84
5.7.4	Conclusioni	87
	Conclusioni e sviluppi futuri	i
	Bibliografia	ii
	Elenco delle figure	vii
	Elenco delle tabelle	xi
A	Listato del programma Catenaria	1
A.1	Il file di input	1
A.2	Il file di output	2
A.3	Il programma	3

Capitolo 1

Introduzione

Si presentano e si analizzano le peculiarità dei ponti strallati.

1.1 Storia

Il problema delle grandi luci è diventato attuale nella seconda metà del 1800, con il diffondersi del trasporto su via ferrata. A causa delle grandi limitazioni planimetriche e altimetriche dei tracciati ferroviari si è abbandonata la progettazione che prevedeva la soluzione più economica per prediligere la più ottimale a livello funzionale.

Con il diffondersi del traffico su ruote le caratteristiche delle vie carraie sono andate sempre più uniformandosi a quelle delle ferrovie. Per i progettisti del tempo questo clima comportò molteplici occasioni per costruire ponti di grandi luci.

I ponti strallati, oggetto della presente tesi, vedono però la loro diffusione solo il secolo successivo.

La prima concezione di ponte strallato risale al 1784, il carpentiere Loescher in Germania realizzò una struttura interamente in legno. Successivamente ad alcuni ponti

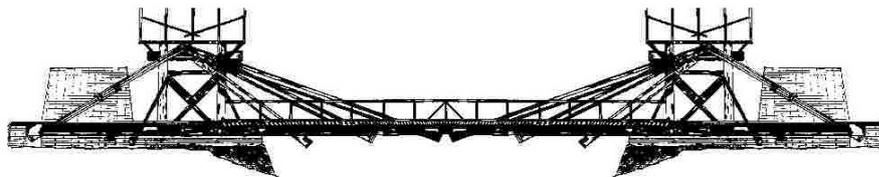


Figura 1.1: Progetto di Loescher.

sospesi vennero affiancati sistemi di stralli per aumentarne la rigidità, ma un sistema interamente strallato non fu mai realizzato in quanto l'utilizzo del ferro e di cavi laschi portavano ad avere strutture troppo deformabili e conseguentemente inutilizzabili.

Importanti innovazioni nel campo dei ponti su grandi luci si ebbero a seguito di tre terribili incidenti, quello del ponte di Dryburgh Abbey, del 1818, e del Tacoma Narrows Bridge, del 1940, dovuti all'azione del vento, e quello occorso al ponte di Niemburg nel 1825, dovuto alla resistenza propria del ferro. Questi incidenti portarono alla definizione di materiali all'avanguardia e allo studio degli effetti dinamici fino ad allora non presi in considerazione.

Nel 1855, J. Roebling costruì un ponte sospeso, con degli stralli nei dintorni delle antenne, sulle Cascate del Niagara, introducendo l'utilizzo dell'acciaio al posto del ferro e un impalcato avente altezza maggiore, perciò più resistente agli effetti dinamici e in grado di garantire deformazioni minori. Lo stesso ingegnere successivamente progettò e costruì il ponte di Brooklyn.

Allo stesso modo in Europa, Ordish e Le Fleuve costruirono l'Albert Bridge sul fiume Tamigi e il Franz-Joseph Bridge a Praga.

In tutti i casi evidenziati finora la struttura portante è di tipo sospeso al quale sono associati degli stralli per irrigidire il comportamento complessivo del ponte, questi ultimi vengono intesi come elementi di ferro laminati. Solo nel 1926 E. Torroja utilizzò per la prima volta dei cavi da precompressione ad alta resistenza come stralli e li ricoprì di calcestruzzo per proteggerli dalla corrosione.

Nel 1938, Dischinger introdusse stralli pretesi nel progetto di ponti. I suoi studi infatti portarono alla conclusione che sia la rigidità che la stabilità aerodinamica venivano incrementate dall'utilizzo di stralli pretesi. Dopo la Seconda Guerra Mondiale, egli si adoperò nella ricostruzione delle opere infrastrutturali in Germania e la sua idea venne presa molto in considerazione data la facilità di realizzazione e l'economicità del progetto stesso. Egli realizzò nel 1955 il ponte di Strömsund, considerato il primo ponte strallato di questa era.

Tutti i ponti di questo periodo hanno impalcato molto rigidi e in grado di sopportare le forze trasmesse da stralli tra loro molto distanziati. Il primo a riconoscere la migliore efficacia della cortina di stralli fu Homberg, nel 1967, durante il progetto del Friedrich Ebert Bridge di Bonn. La scelta di aumentare il numero di stralli, riducendo così la distanza tra gli stessi, facilitava le fasi di costruzione e permetteva la realizzazione di ponti con campate sempre più lunghe.

La rapida diffusione di questo genere di ponti la si può attribuire ai vantaggi strutturali ed economici di questa tipologia, ai quali va aggiunto l'aspetto estetico. Questi ponti permettono infatti una più libera disposizione degli elementi strutturali, offrendo una maggior libera espressione ad alcuni architetti, i quali collaborando con ingegneri, hanno realizzato veri capolavori.



Figura 1.2: Particolare del ponte Albert Bridge.

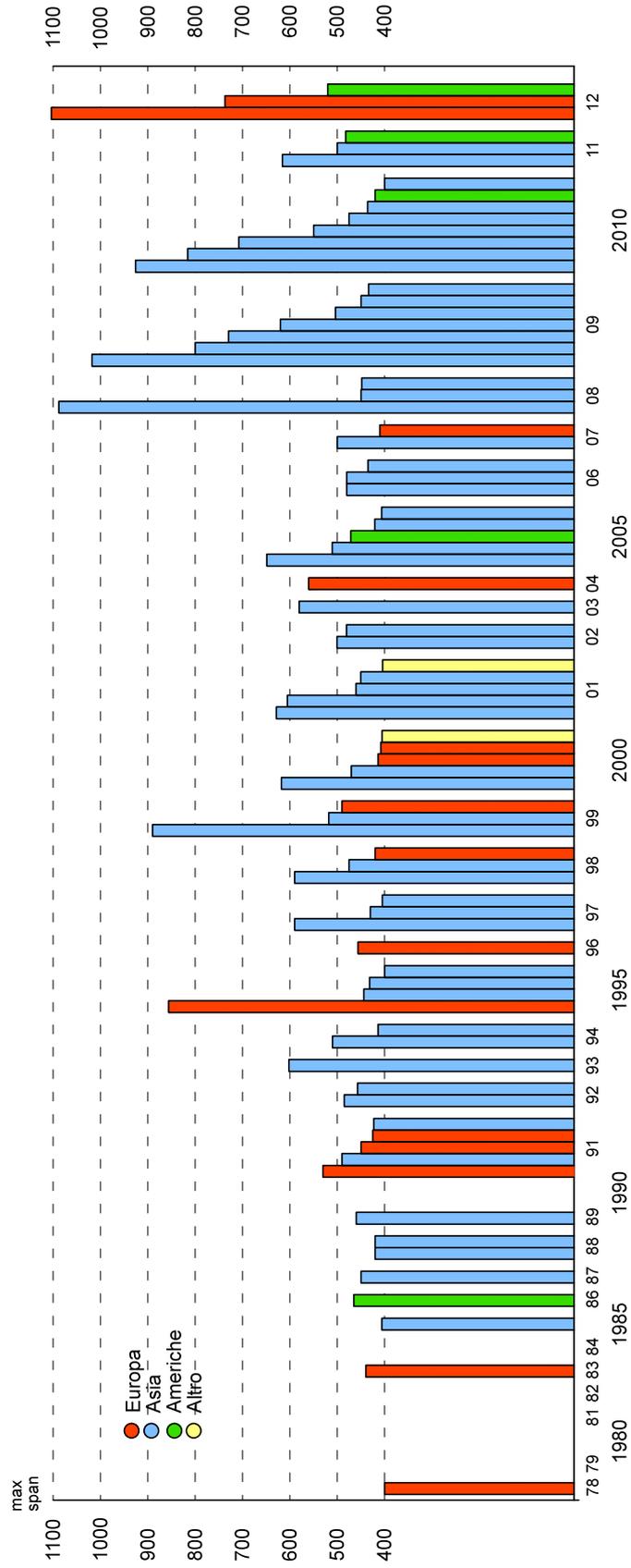


Figura 1.3: Aumento della lunghezza della massima campata, espressa in $[m]$, al passare degli anni.

1	Millau Viaduct	204	342	342	342	342	342	342	342	204
2	Rio-Antirion Bridge	286	560	560	560	560	560	560	286	
3	Russky Island Bridge	384	1104	1104	1104	384				
4	Sutong Bridge	300	1088	1088	300					
5	Stonecutters Bridge	289	1018	289						
6	Erqi Yangtze River Bridge	160	616	616	160					
7	Zolotoy Rog Bridge	330	737	330						
8	Incheon Bridge	260	800	260						
9	Tatara Bridge	164	890	258						
10	Shanghai Yangtze River Bridge	258	730	258						
11	Ting Kau Bridge	127	448	475	127					
12	Meike-Chuo Bridge	290	590	290						
13	Third Nanjing Yangtze Bridge	255	648	255						
14	Second Nanjing Yangtze Bridge	246	628	246						
15	Qingzhou Bridge	250	650	250						
16	Edong Bridge	85	926	85						
17	Xupu Bridge	242	590	242						
18	Jintang Bridge	218	620	218						
19	Anqing Bridge	265	510	265						
20	Tsurumi Tsubasa Bridge	255	510	255						

Figura 1.4: I 20 ponti più lunghi al mondo, è evidenziata la campata maggiore. Le lunghezze sono espresse in [m].

1.2 Tipologia e tecnologia

1.2.1 La disposizione degli stralli

Le disposizioni fondamentali degli stralli sono tre, ventaglio, arpa e semi-ventaglio, 1.5. Possono poi esistere delle situazioni intermedie, ottenute realizzando una campata con un sistema e un'altra in modo differente.

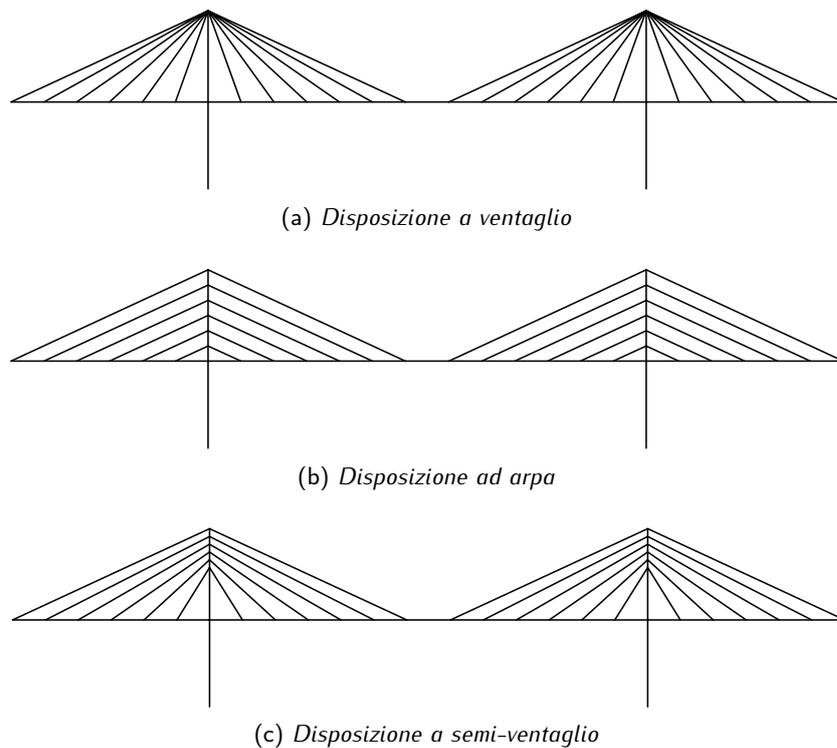


Figura 1.5: Classificazione in base alla disposizione degli stralli.

Le due tipologie estreme presentano entrambe degli svantaggi.

La disposizione a ventaglio prevede che tutti gli stralli vengano attaccati alla sommità dell'antenna, questo, oltre a comportare problemi tecnologici dovuti alla connessione cavi-antenna, crea una concentrazione di sollecitazioni non ottimale.

Una disposizione ad arpa, d'altro canto, presenta uno svantaggio legato alla tensione negli stralli, essa infatti richiede, a parità di forza verticale da esercitare, una sollecitazione maggiore, alla quale corrisponderà un'area del cavo più grossa, perciò un aumento dei costi complessivi.

La disposizione a semi-ventaglio risulta perciò la preferibile in quanto è economica e mitiga gli svantaggi delle altre configurazioni.

1.2.2 Le antenne

Questo particolare elemento è influenzato dalla disposizione degli stralli e degli ancoraggi, dal tipo di impalcato e dal tipo di tesatura dei cavi. In generale le possibili soluzioni sono riconducibili alle seguenti alternative.

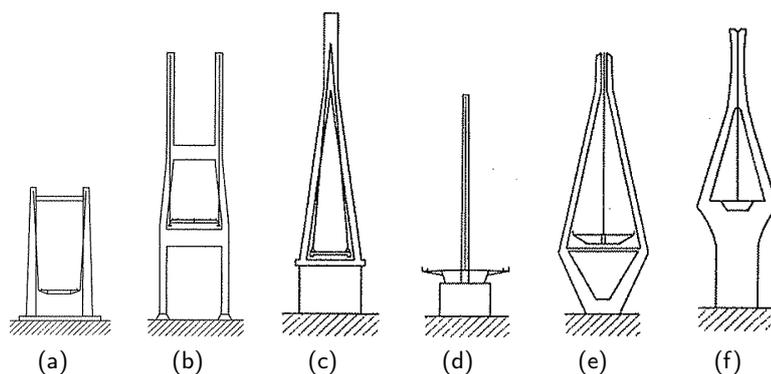


Figura 1.6: Diverse configurazioni delle antenne.

Le soluzioni 1.6a e 1.6b sono le più spontanee, con due piani verticali per gli stralli. La versione 1.6d è la più apprezzabile dal punto di vista estetico, però richiede che la trave d'impalcato abbia un'elevata rigidità torsionale e sia presente uno spartitraffico ampio da permettere la protezione degli ancoraggi degli stralli. Le altre soluzioni sono indicate maggiormente per ponti aventi grandi luci, in quanto per questi ultimi le antenne devono avere elevata rigidezza nel piano trasversale.

1.2.3 Gli ancoraggi

Gli ancoraggi degli stralli possono essere molti, ogni ponte può avere diverse necessità per le quali sono adeguate soluzioni tecnologiche molto differenti. Il tipo più ricorrente di ancoraggio all'impalcato consiste nel far passare il cavo all'interno di un contenitore preformato in maniera che i cavi siano distanziati opportunamente da permettere l'ancoraggio di ogni singola fune a piastre di ripartizione.

Per quanto riguarda i sistemi di ancoraggio sulla sommità dell'antenna la varietà di sistemi utilizzati aumenta esponenzialmente. Essi non solo devono permettere la connessione ma devono garantire anche la possibilità di ispezione ed eventualmente la sostituzione di stralli danneggiati. Tra le soluzioni più comuni vi sono le seguenti.



Figura 1.7: Particolare del ponte sull'Adda.

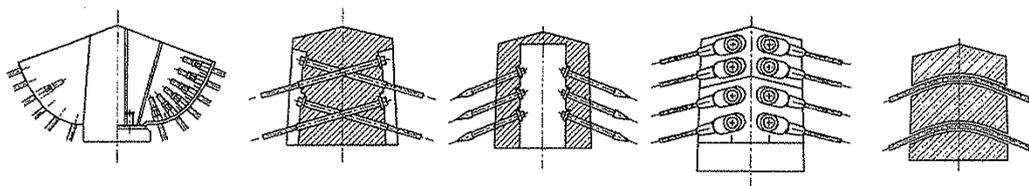


Figura 1.8: Sistemi di ancoraggio in sommità delle antenne.



(a) *Rio Antirio, Grecia*



(b) *Particolare del ponte di Calatrava, Reggio Emilia*



(c) *Zakim Bridge, Boston*



(d) *Seri Wawasan Bridge, Malaysia*

1.2.4 L'impalcato

L'impalcato di un ponte strallato può essere in calcestruzzo armato precompresso, in acciaio o in struttura mista. La scelta viene effettuata sulla base della luce da coprire, il numero e la disposizione degli stralli e dalle tecnologie di costruzione adottate. Nelle seguenti figure vi sono degli esempi di sezioni in calcestruzzo e in acciaio.

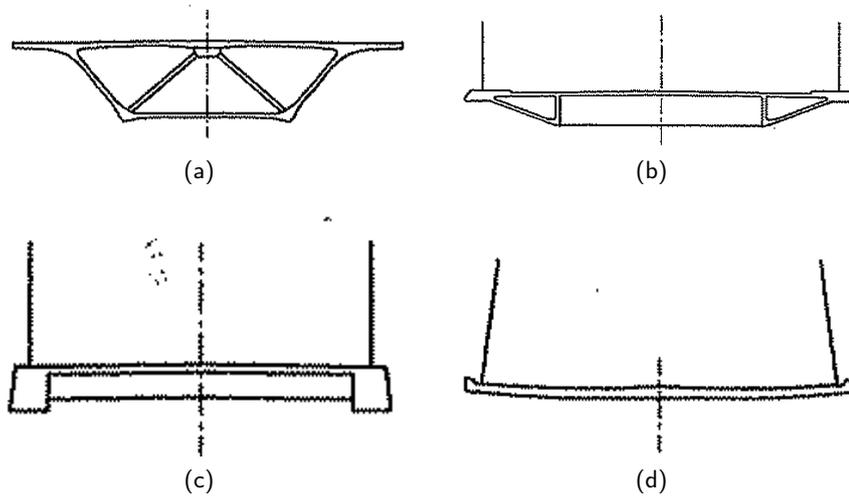


Figura 1.9: Possibili sezioni di calcestruzzo.

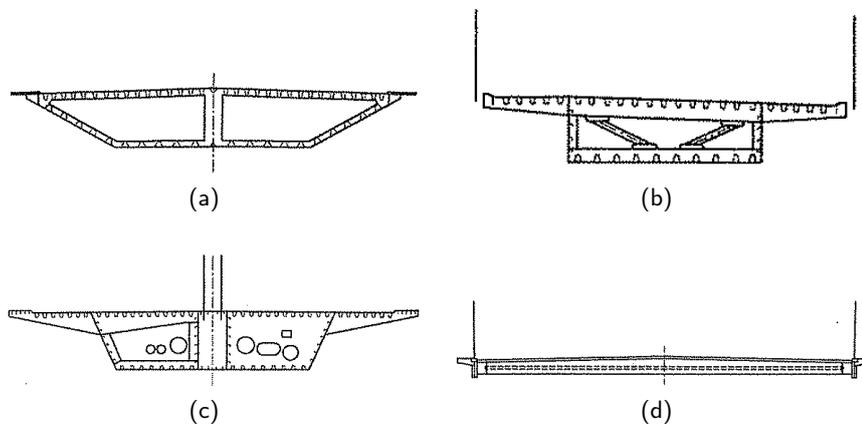


Figura 1.10: Possibili sezioni in acciaio.

1.2.5 I cavi

Nei paragrafi precedenti e nei capitoli che seguiranno il termine strallo e cavo sono stati utilizzati indistintamente per indicare l'elemento strutturale teso che caratterizza questo genere di ponte.

All'interno di questo paragrafo viene analizzata la morfologia dello strallo. Questo elemento strutturale è formato da cavi costituiti da numerosi fili di acciaio ad elevato carico di rottura.

I cavi più comuni sono di due tipi, i cavi realizzati con funi spirodali e quelli costituiti da fili paralleli.

I cavi costituiti da funi spirodali possono essere suddivisi a loro volta in spirodali semplici o chiuse. Quelle del primo tipo sono costituite da fili zincati a caldo avvolti ad elica intorno al nucleo centrale.

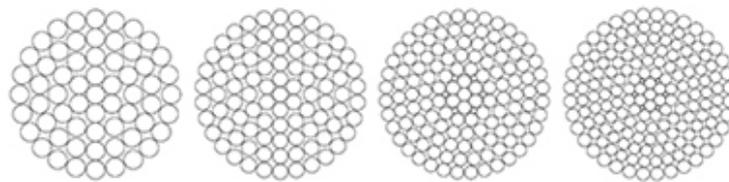


Figura 1.11: Sezioni di fune spirodiale semplice.

I cavi da funi spirodali chiuse hanno il nucleo centrale formato da un numero relativamente piccolo di fili cilindrici elementari, mentre la parte maggiore è costituita da uno o più strati di fili trapezi o sagomati a Z.

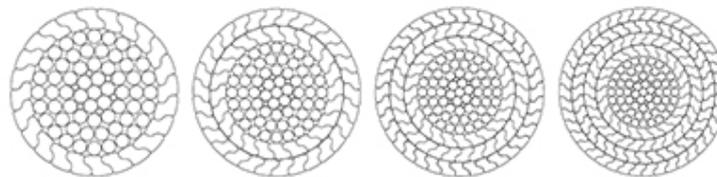


Figura 1.12: Sezioni di fune spirodali chiuse.

Questo tipo di cavi presenta una buona protezione dalla corrosione e una notevole flessibilità, purtroppo durante la cordatura possono generarsi tensioni parassite che comportano una resistenza della fune minore di quella del singolo filo.

Il secondo tipo viene realizzato accostando i singoli fili in modo da realizzare sezioni di forma regolare. Generalmente ogni singolo filo è sottoposto a zincatura e l'insieme della sezione viene ricoperta da una guaina di materiale plastico all'interno della quale vengono poi successivamente iniettate delle resine.

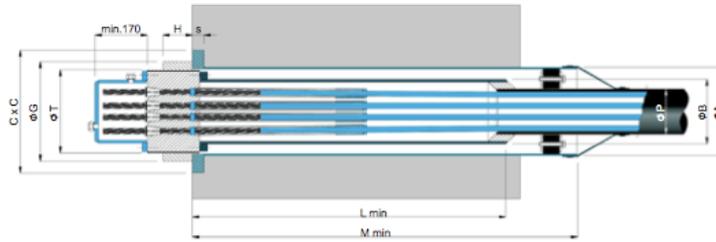
Questo genere di cavi ha il vantaggio che non esistono tensioni parassite dovute all'avvolgimento, la resistenza del singolo filo coincide con la resistenza del cavo completo. Di contro questo tipo di cavo è poco flessibile e la rottura di un filo provoca la riduzione dell'intera area resistente, cosa che in una fune spirodiale non succede.



Figura 1.13: Gli stralli.

Nella seguenti figure vi sono degli estratti da due cataloghi di stralli di aziende italiane.

Ancoraggio a tendere - Stressing Anchorage



Strallo da Stay Cable size	GBL ⁽¹⁾ kN	G mm	T mm	H mm	F mm	P mm	A mm	B mm	L mm	M mm	C ⁽²⁾ mm	s mm
12T15	3348	225	185	65	130	110/6.3	205/4	152	600	800	285	25
19T15	5301	285	235	80	135	140/8.0	255/4	178	700	900	355	30
22T15	6138	310	255	85	145	140/8.0	275/4	203	1000	1200	385	35
31T15	8649	350	285	110	180	160/9.1	307/5	229	1200	1450	445	40
37T15	10323	385	315	120	200	180/10.2	337/5	254	1400	1650	485	45
43T15	11997	425	355	125	205	200/11.4	377/5	285	1600	1850	530	50
55T15	15345	465	385	145	240	225/12.8	409/6	298	1600	1900	590	55
61T15	17019	480	395	155	260	225/12.8	419/6	324	1900	2200	615	60
73T15	20367	535	445	165	270	250/14.2	469/6	356	2000	2300	680	65
85T15	23715	555	455	185	305	250/14.2	481/7	368	2300	2600	720	70
91T15	25389	595	495	180	300	280/15.9	521/7	394	2400	2750	760	75

1) Carico di rottura garantito con trefolo 0.6" Super (d = 15.7mm; A = 150 mm²; Carico di rottura caratteristico = 279 kN)
 Guaranteed Breaking Load (GBL) with 0.6" Super strand (d = 15.7 mm; A = 150 mm²; Characteristic breaking load = 279 kN)
 2) Dimensioni valide per calcestruzzo con resistenza caratteristica a 28 giorni: 45 N/mm² (cubo) o 36 N/mm² (cilindro)
 Dimensions valid for concrete with characteristic strength at 28 days: 45 N/mm² (cube) or 36 N/mm² (cylinder)

Figura 1.14: Alga.

	Ø	Sezione metallica Metallic cross section A (mm ²)	Forza di rottura minima Minimum breaking force MBF (kN)	Rigidità elastica Elastic stiffness E-A (MN)	Massa Mass m (kg/m)
Fune chiusa	d (mm)				
Funi portanti e stabilizzanti per tensostrutture	32	681	1015	112	5.6
Stralli per ponti	36	882	1285	142	7.1
Pendini per ponti sospesi	40	1077	1605	178	8.9
Stralli e funi di sospensione per edifici	44	1303	1945	215	10.7
	48	1551	2315	256	12.8
Full locked coil strand	52	1841	2750	304	15.2
Carrying and prestressing strands for tensostructures	56	2136	3190	352	17.6
Stralls for bridges	60	2452	3660	405	20.2
Hangers for suspension bridges	64	2789	4165	460	23.0
Stays and suspension cables for buildings	68	3149	4700	515	26.0
	72	3530	5210	575	29.1
	76	3933	5790	641	32.4
	80	4358	6405	710	35.9
	84	4805	7045	783	39.6
	88	5274	7720	860	43.5
	92	5764	8430	940	47.5
	96	6276	9165	1023	51.7
	100	6800	10050	1123	56.8
	104	7452	10860	1215	61.4
	108	8037	11700	1310	66.2
	112	8643	12575	1409	71.2
	116	9271	13480	1511	76.4
	120	9922	14415	1617	81.8
	124	10594	15385	1727	87.3
	128	11289	16385	1840	93.0

Figura 1.15: Tensoteci.

Capitolo 2

Generalità sulle funi

Si richiamano le soluzioni storicamente sviluppate per lo studio della fune pesante e si delineano alcune osservazioni utili per la comprensione del suo comportamento meccanico. Le formulazioni sono state implementate in specifici codici di calcolo, riportati in appendice A.

2.1 Il dibattito sull'equilibrio funicolare

Il problema identificato con il nome di *problema intorno all'equilibrio funicolare* ha lo scopo di determinare la disposizione spaziale assunta da una fune pesante fissata alle sue estremità, la cosiddetta *catenaria*. Esso risulta essere antecedente alla risoluzione della *linea elastica*, curva secondo la quale si atteggia una trave inflessa. I primi studi riguardanti la portanza strutturale erano centrati sulla determinazione della resistenza e, quindi, dello stato tensionale ad essa associato. L'analisi della deformazione interveniva come semplice passaggio, funzionale al successivo riconoscimento delle sollecitazioni interne, e si presentava quindi senza intenzioni applicative. Al contrario, il problema dell'equilibrio funicolare era tutt'altro che astratto perché nato per determinare la forma più conveniente da assegnare ad un ponte sospeso.

La testimonianza scritta più antica risale a Galileo Galilei, anche se già Leonardo da Vinci pare si fosse occupato del problema. È comune affermare che Galileo, nei *Discorsi*, abbia espresso il parere che la curva cercata sia una parabola. Gli autori successivi impostarono addirittura una campagna denigratoria nei suoi confronti.

Tutto ciò desta alcune curiosità, primo perché tale deduzione non è totalmente errata, ma è al massimo imprecisa, e secondo perché tale affermazione non può essergli attribuita, infatti egli lasciò intendere l'approssimazione del suo risultato: *“Ma più voglio dirvi, recandovi*

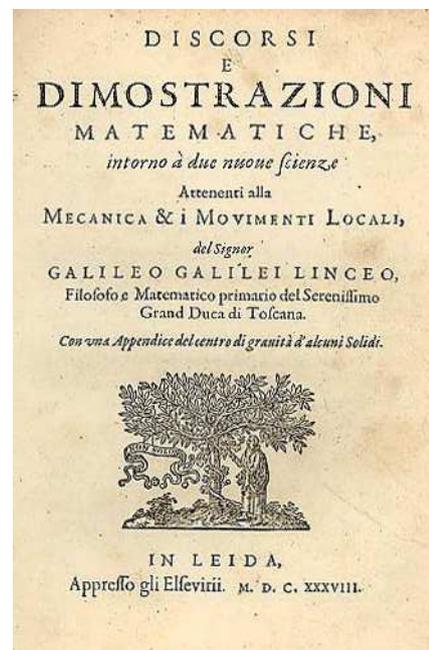


Figura 2.1: Galileo Galilei, *Discorsi*.

“Ma più voglio dirvi, recandovi

insieme meraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizzonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenazza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr. 45, la catenella camina quasi ad unguem sopra la parabola".

Qualche tempo prima, Beekman si era rivolto a Cartesio ponendogli alcuni quesiti inerenti alla fune sospesa, ma quest'ultimo non volle approfondire la questione, [3]. A cavallo fra il 1614 e il 1615, Beekman diede la soluzione del problema del ponte sospeso nel quale la fune portante, pensata come non pesante, sopporta carichi uniformemente distribuiti. Mediante una parziale dimostrazione geometrica, egli giunse alla conclusione, corretta, che tale fune si atteggia come una parabola.

Anche Huygens, intorno al 1646 giunse allo stesso risultato. In particolare, egli dedicò molta attenzione a confutare il lavoro di Galileo che, morto quattro anni prima, non ebbe l'occasione di ricordargli come la sua affermazione riguardasse solamente il caso di funi molto tese.

Nel 1673 Ignazio Gastone Pardies dimostrò come una fune omogenea pesante non possa attegiarsi secondo un profilo parabolico, Fig. 2.2.

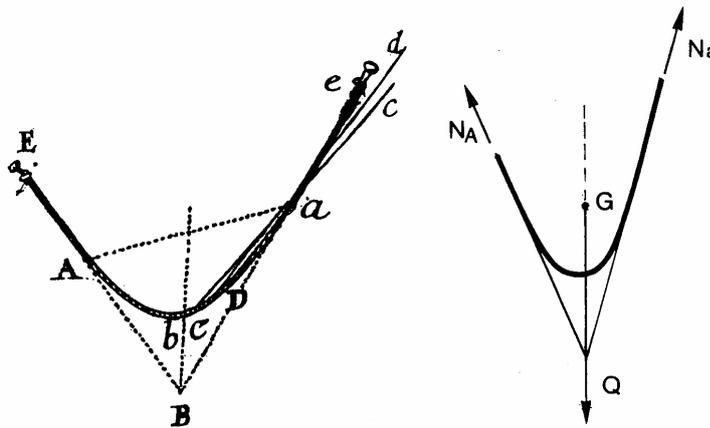


Figura 2.2: Teorema di Pardies.

Ma la discussione sulla catenaria divampò nel 1690, quando Giacomo Bernoulli ne propose il problema all'attenzione degli scienziati del tempo tramite una sua memoria pubblicata dagli "Acta Eruditorum" di Lipsia. Subito Leibniz rispose annunciando la possibilità di utilizzare la "sua chiave", cioè il calcolo differenziale, per giungere alla soluzione, [3].

Nel medesimo anno anche Huygens si mise al lavoro e insistentemente chiese per lettera a Leibniz, utilizzando per la prima volta il termine catenaria, notizie sugli esiti della ricerca con il nuovo algoritmo. Nell'attesa studiò per suo conto e ottenne qualche risultato, seppur limitato e involuto, che inviò a Leibniz perché lo pubblicasse presso gli "Acti" di Lipsia. Fu così che nel giugno del 1691 uscì un numero memorabile degli "Acta Eruditorum". L'editore, presentando il volume, scrisse: *Il benevolo lettore*

ricorderà senz'altro il problema proposto dall'illustre Professore Giacomo Bernoulli di Basilea. Il celebre Guglielmo Goffredo Leibniz aveva promesso di render nota una soluzione ottenuta col suo metodo, se nessun altro l'avesse trovata entro la fine dell'anno. In realtà, il fratello del proponente, il Signor Giovanni Bernoulli, studioso di Medicina e molto versato in queste ricerche, trovò la soluzione e la mandò a noi il Dicembre scorso; inoltre, tramite suo fratello, egli ci chiese molto gentilmente di aggiungere alla sua quella di Liebzniz. Per questo, sollecitammo il celebre Signore sopra menzionato a pubblicare il suo risultato.(...) Anche il Nobile Christian Huygens si è degnato di ornare il nostro Giornale della soluzione al problema. Quindi vi presentiamo, benevolo lettore, le due soluzioni di questi illustri Nobiluomini e quella di Bernoulli, ma nell'ordine in cui le ricevevmo.

Truesdell commentò e distinse i tre lavori con la frase: "Per il 1690, le tre soluzioni, nell'ordine di consegna, mostrano la matematica del futuro, del presente e del passato".

Huygens si mosse ancora nell'area culturale vecchia, esercitando, sia pur con grande perizia, il complesso metodo geometrico. Leibniz invece diede la formula analitica corretta della catenaria, Fig. 2.3, pur senza offrire sufficienti giustificazioni meccaniche. È tuttavia lecito pensare che la base del suo ragionamento fosse il teorema di Pardies, come egli stesso spiegò in una famosa lettera del 1664 a Huygens, in risposta a una "lunga sequela di domande, di recriminazioni e di accuse". Per ultimo, il contributo di Giovanni Bernoulli, dal titolo "Solutio problematis funicularis", offrì due costruzioni corrette della catenaria e ne enumera svariate proprietà.

Per concludere, è importante sottolineare come il compimento dello studio della catena pesante introdusse un concetto nuovo per la meccanica dei continui: l'esigenza e la possibilità di esprimere in forma differenziale le equazioni di equilibrio, imponendo, appunto, *l'equilibrio per ogni elemento infinitesimo del corpo*. Lo studio della fune sospesa fu, in altre parole, il primo degli argomenti trattati e risolti con rigore dalla meccanica moderna con l'ausilio dei primi elementi dell'analisi infinitesimale.

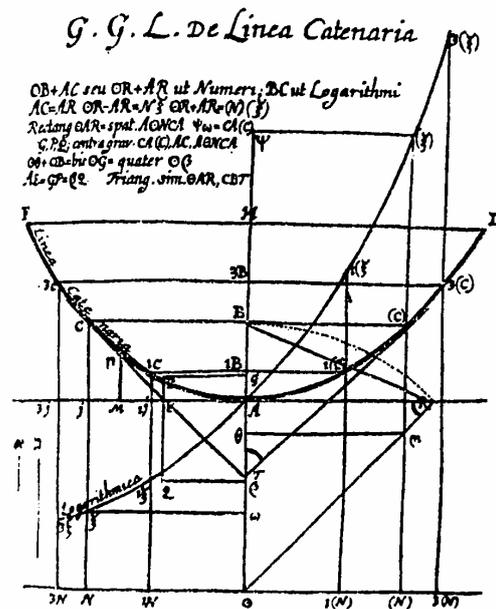


Figura 2.3: La dimostrazione di Leibniz.

2.2 Considerazioni introduttive

Definito il clima e le circostanze in cui si sviluppò il concetto di catenaria, vengono ora riportate le proprietà di cui gode e sulla base delle quali è stato possibile giungere alle soluzioni.

Gli elementi di cavo sono assunti come perfettamente flessibili e in grado di sostenere solo forze di trazione, questa elegante definizione è attribuita a Giovanni Bernoulli, "*The action of any part of the line upon its neighbor is purely tangential.*", [15]. Per giungere alla stessa conclusione, si può osservare come le dimensioni trasversali siano ridotte rispetto alla lunghezza. Questo fatto ci porta a pensare che la fune non sia in grado di esercitare la resistenza necessaria per escludere qualsiasi fenomeno di instabilità, sia esso dovuto ad azioni assiali, momenti flettenti o torcenti, cioè ci porta ad affermare che un elemento di cavo sia in grado di sopportare solo sforzi di trazione.

2.3 Soluzioni analitiche

Nei seguenti paragrafi verranno trattate le seguenti soluzioni analitiche:

- catenaria inestensibile;
- parabola inestensibile;
- catenaria elastica.

2.3.1 Catenaria inestensibile

Si consideri un cavo omogeneo pesante fissato alle due estremità, sia esso perfettamente flessibile, cioè risulti $EI \simeq 0$, e inestensibile, $EA \simeq \infty$.

Si consideri il seguente tratto di filo infinitesimo:

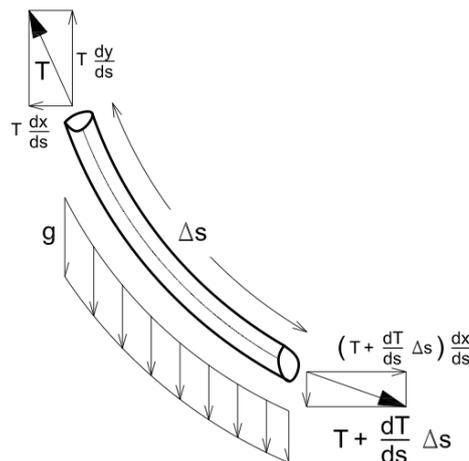


Figura 2.4: Tratto infinitesimo di filo.

Dall'equilibrio alla traslazione si ottengono le seguenti equazioni:

- traslazione orizzontale lungo x :

$$T \frac{dx}{ds} - \left(T \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) \Delta s \right) = 0 \quad (2.1)$$

che comporta:

$$T \frac{dx}{ds} = cost = H \quad (2.2)$$

- traslazione verticale lungo y :

$$T \frac{dy}{ds} - \left(T \frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) \Delta s \right) - g \Delta s = 0 \quad (2.3)$$

da cui:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -g \quad (2.4)$$

Introducendo l'espressione di T , ricavata a partire dalla (2.2), all'interno di quest'ultima equazione otteniamo:

$$\frac{d}{ds} \left(H \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds} \right) = -g \quad (2.5)$$

Conseguentemente è possibile ridurre l'equazione in

$$H \frac{dy^2}{dx^2} = -g \frac{ds}{dx} \quad (2.6)$$

nella quale si è differenziato per x . Va fatto notare che la quantità $-g \frac{ds}{dx}$ rappresenta l'intensità del carico per unità di lunghezza.

Dovendo valere la seguente relazione

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1 \quad (2.7)$$

si può scrivere l'equazione indefinita di equilibrio come:

$$H \frac{dy^2}{dx^2} = -g \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Separando le variabili si perviene a

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{g}{H} dx \quad (2.9)$$

che integrata diventa

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{g}{H} x + cost \quad (2.10)$$

Sostituendo $y' = Shu$ si ottiene

$$\int \frac{Chu \cdot u}{\sqrt{1+Sh^2u}} = -\frac{g}{H} x + cost \quad (2.11)$$

tenendo conto che $Ch^2u - Sh^2u = 1$ si perviene a

$$\int \frac{Chu \cdot u}{\sqrt{Ch^2u - Sh^2u + Sh^2u}} = \int \frac{Chu \cdot u}{\sqrt{Ch^2u}} = u + cost \quad (2.12)$$

perciò la soluzione di questo integrale è $u + cost = -\frac{g}{H}x + cost$, che equivale a $u = -\frac{g}{H} + C$. Ricordando che $y' = Shu = Sh\left(-\frac{g}{H} + C\right)$, integrando un'ultima volta si giunge all'equazione di equilibrio della catenaria inestensibile:

$$y(x) = -\frac{H}{g}Ch\left(-\frac{g}{H} + C\right) + D \quad (2.13)$$

Per concludere la trattazione verranno ora imposte le condizioni al contorno. Si faccia riferimento al seguente schema

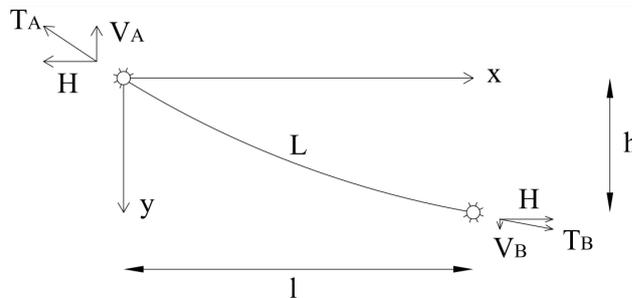


Figura 2.5: Condizioni al contorno.

Imponendo le condizioni al contorno, $x = 0 \rightarrow y = 0$ e $x = l \rightarrow y = h$, la (2.13) diventa

$$y(x) = \frac{H}{g} \left(Ch\alpha - Ch\left(\frac{2\beta}{l}x - \alpha\right) \right) \quad (2.14)$$

dove:

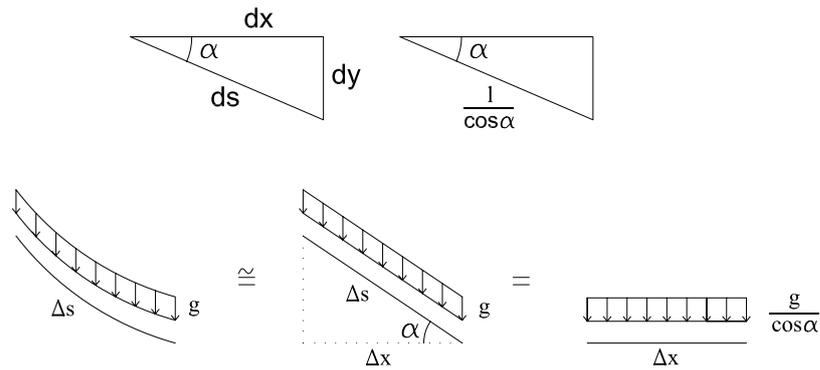
$$\beta = \frac{gl}{2H} \quad \alpha = Sh^{-1}\left(\frac{\beta \cdot (h/l)}{Sh\beta}\right) + \beta$$

A partire dalla (2.14), nota H o assegnata l'ordinata in un punto del cavo, risulta definita tutta la geometria ed è possibile ricavare tutte le grandezze desiderate.

2.3.2 La parabola inestensibile

A fini puramente illustrativi, verrà qui analizzata la parabola inestensibile, che, come avevano già notato alcuni studiosi, tra cui Galilei, ha delle analogie con la catenaria inestensibile.

Nel caso di funi molto tese, caso di notevole interesse pratico per le strutture civili, si può pensare di approssimare il tratto di filo con il tratto di congiungente gli estremi.



Introducendo l'angolo α , definito come l'angolo che la congiungente gli estremi forma con l'orizzontale, si ha

$$\frac{ds}{l/\cos\alpha} = dx/l \quad (2.15)$$

da cui

$$\frac{ds}{dx} \cong \frac{l/\cos\alpha}{l} = 1/\cos\alpha \quad (2.16)$$

Con l'approssimazione introdotta, l'equazione di equilibrio indefinito, eq. (2.8), si semplifica:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\cos\alpha} = \text{cost} \quad (2.17)$$

Confrontando i membri dell'equazione precedente si può notare che:

- al primo membro compare la risultante verticale, agente su un tratto infinitesimo di filo di lunghezza ds , della tensione nel filo;
- al secondo membro compare la risultante verticale del peso proprio del filo. L'approssimazione introdotta, consistente nell'approssimare il tratto curvilineo infinitesimo con il tratto infinitesimo di retta congiungente, comporta in pratica una proiezione del peso proprio lungo la suddetta congiungente. Cioè, in parole più semplici, si confonde il peso per unità di lunghezza del cavo con il peso per unità di proiezione lungo la congiungente.

In questo modo, correttamente, la risultante complessiva del peso proprio si conserva, ma ci si è ricondotti ad una scrittura più comoda, come si evince da quanto segue:

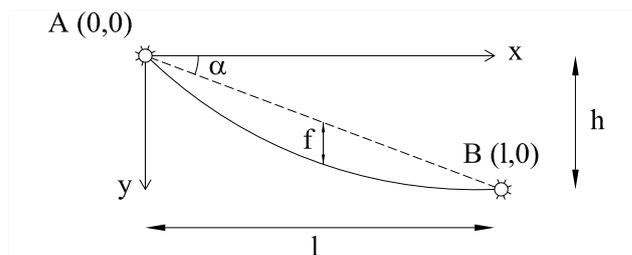
$$g\Delta s \cong \frac{\Delta x}{\cos\alpha} = \frac{g}{\cos\alpha} \Delta x \quad (2.18)$$

L'equazione di equilibrio può ora essere riscritta ed integrata:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{H\cos\alpha} \quad (2.19)$$

$$y(x) = -\frac{g}{H\cos\alpha} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (2.20)$$

Si impongono ora le condizioni al contorno per determinare le costanti di integrazione:



$$\begin{cases} y(0) = 0 & \rightarrow C_2 = 0 \\ y(l) = h & \rightarrow C_1 = \frac{h}{l} + \frac{gl}{2H \cos \alpha} \end{cases}$$

Introducendole nell'equazione (2.20), si ottiene:

$$y(x) = -\frac{g}{2H \cos \alpha} x^2 + \left(\frac{h}{l} + \frac{gl}{2H \cos \alpha} \right) x \quad (2.21)$$

la quale rappresenta l'equazione approssimata di un filo teso tra due estremi, di andamento sufficientemente vicino alla corda; l'andamento è, come facilmente osservabile, parabolico.

A questo punto si vuole determinare il legame esistente tra la freccia (misurata rispetto alla congiungente e non rispetto all'orizzontale) e la componente orizzontale del tiro nel cavo, che diventerà utile successivamente.

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{y(0) + y(l)}{2} + f = \frac{h}{2} + f \rightarrow f = \frac{gl^2}{8H \cos \alpha} \quad (2.22)$$

Si ricava ora l'espressione analitica della lunghezza del filo, in modo tale da disporre di un'equazione che lega il tiro nel cavo e la sua lunghezza. Per definizione:

$$L = \int_0^{L_0} ds = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.23)$$

Sviluppando in serie di Taylor e introducendo un cambio di variabile $t = dy/dx$, si ha:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} y''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + t.o.s. \quad (2.24)$$

prendendo il punto $t_0 = 0$, lo sviluppo in serie di Mc Laurin è:

$$y(t) = y(0) + y'(0) \cdot t + \frac{1}{2} y''(0) \cdot t^2 + t.o.s. \quad (2.25)$$

Nel caso in esame:

$$\begin{cases} y(t) & = \sqrt{1 + t^2} \\ y'(t) & = t (1 + t^2)^{-1/2} \\ y''(t) & = (1 + t^2)^{-1/2} - t^2 (1 + t^2)^{-3/2} \end{cases}$$

Pertanto, la (2.25) diviene:

$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2} \rightarrow y(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (2.26)$$

Introducendo quanto trovato nella (2.23), si ottiene:

$$L = \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx \quad (2.27)$$

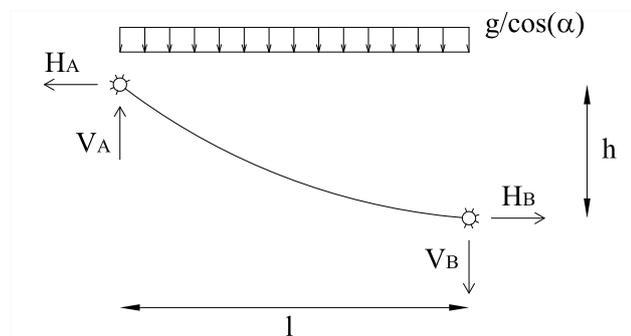
ricordando la (2.21) e svolgendo i conti, si arriva alla:

$$L = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{1}{24} \frac{g^2 l^3}{H^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.28)$$

Introducendo in quest'ultima, grazie alla (2.22), il termine f^2 , si perviene alla relazione cercata:

$$L = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} \quad (2.29)$$

Per finire si possono determinare anche le altre grandezze di interesse sfruttando le equazioni di equilibrio dell'intero filo:



$$H_A = H_B = H \quad V_A = H \frac{h}{l} + \frac{g}{\cos \alpha} \frac{l}{2} \quad V_B = H \frac{h}{l} - \frac{g}{\cos \alpha} \frac{l}{2} \quad (2.30)$$

Quindi la tensione agli estremi nel filo può ricavarsi tramite le:

$$T_A = \sqrt{H^2 + V_A^2} \quad T_B = \sqrt{H^2 + V_B^2} \quad (2.31)$$

e dall'equilibrio di un tratto di filo lungo x risulta l'andamento della tensione nel filo intero:

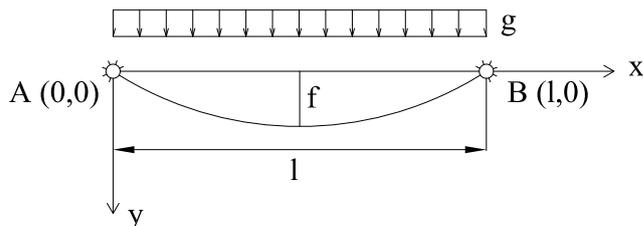
$$T(x) = H \sqrt{1 + y'^2} \quad \rightarrow \quad T(x) = H \sqrt{1 + \frac{64f^2}{l^2} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{hl}{8f} \right]} \quad (2.32)$$

2.3.2.1 Un caso particolare: appoggi allo stesso livello

Quando gli appoggi si trovano allo stesso livello, $\alpha = 0$; se inoltre vale ancora l'ipotesi per cui la configurazione del filo è tale che il rapporto f/l tra freccia e luce è piccolo, si ha $y'(x) \cong 0$. In questo caso particolare il peso per unità di lunghezza è approssimabile con il peso per unità di proiezione orizzontale. L'equazione di equilibrio indefinito del filo, eq. (2.19), diviene ora:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -g \quad (2.33)$$

Integrando due volte ed imponendo le condizioni al contorno, si ottiene l'equazione di una parabola ad asse verticale:



$$y(x) = \frac{gx}{2H} (l - x) \quad (2.34)$$

la quale descrive punto per punto la deformata di un filo molto teso, sotto l'azione del peso proprio, e con le imposte allo stesso livello. A questo punto, basta porre $h = 0$ e $\alpha = 0$ nelle equazioni ricavate al paragrafo precedente per determinare le espressioni relative al caso in esame:

$$f = \frac{gl^2}{8H} \rightarrow H = \frac{gl^2}{8f} \quad (2.35)$$

La lunghezza del filo è $L = \int_0^l ds$ e, procedendo come in precedenza cioè sviluppando in serie di Taylor la funzione integranda, si ottiene:

$$L = l \left(1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{l} \right)^4 + \frac{256}{7} \left(\frac{f}{l} \right)^6 - \frac{2560}{11} \left(\frac{f}{l} \right)^8 + \dots \right) \quad (2.36)$$

Tale sviluppo può essere arrestato ai primi due termini se la parabola è molto piatta, cioè se risulta:

$$\frac{f}{l} \ll \frac{1}{10} \rightarrow L = l \left(1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right), \quad (2.37)$$

ritrovando, come ci si aspettava, l'espressione della lunghezza della parabola tra due estremi generici, imponendo $h = 0$ nell'eq. (2.29). Può essere utile a questo punto introdurre nell'espressione di $y(x)$ il legame tra H ed f , per ottenere un'espressione più compatta:

$$y(x) = 4f \left[\left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (2.38)$$

ricordando la (2.32), si ottiene:

$$T(x) = H \sqrt{1 + \frac{64f^2}{l^4} \left(\frac{l}{2} - x \right)^2} \quad (2.39)$$

La tensione massima si ha agli estremi ($x = 0$) e ($x = l$), dove vale:

$$T_{Max} = H \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \quad (2.40)$$

2.3.3 Catenaria elastica

Ripercorrendo quanto fatto nel paragrafo precedente, a partire dagli equilibri traslazionali, verranno ricavate le equazioni che descrivono l'elemento di catenaria elastica. In questo caso continuerà a persistere solo l'ipotesi di perfetta flessibilità, $EI \simeq 0$.

Durante la trattazione si farà riferimento a due coordinate Lagrangiane, la prima, s , percorre il cavo privo di carichi e può variare da 0 a L_0 ; la seconda, p , percorre il medesimo sottoposto a peso proprio $W = mgL_0$ e può variare da 0 a L . In questo modo un punto appartenente al cavo può essere individuato in funzione delle coordinate cartesiane (x, y) o in termini di coordinate Lagrangiane. Va fatto notare che la lunghezza L_0 non dovrà essere necessariamente superiore a $(l^2 + h^2)^{1/2}$, potrà anche essere inferiore, l'importante è che non venga violata la legge di Hooke.

Le coordinate dei punti devono soddisfare la seguente condizione geometrica

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 = 1 \quad (2.41)$$

Facendo riferimento alla figura 2.5 è possibile scrivere le seguenti equazioni di equilibrio:

$$T \frac{dx}{dp} = H \quad (2.42a)$$

$$T \frac{dy}{dp} = V - W \cdot \frac{s}{L} \quad (2.42b)$$

La relazione costitutiva che verrà adottata è la seguente

$$T = E \cdot A \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (2.43)$$

dove E è il modulo di Young e A_0 la sezione trasversale del cavo nel profilo non caricato.

Le condizioni al contorno che vanno soddisfatte sono

$$x = 0, \quad y = 0, \quad p = 0 \quad \text{per} \quad s = 0 \quad (2.44)$$

$$x = l, \quad y = h, \quad p = L \quad \text{per} \quad s = L_0 \quad (2.45)$$

Definite tutte le equazioni di partenza e note le condizioni di contorno, è possibile ora determinare le funzioni di x , y e T in termini di s come segue:

- $T = T(s)$: si può ricavare sostituendo il quadrato delle (2.42) nell'equazione (2.41)

$$T(s) = \left\{ H^2 + \left(V - W \cdot \frac{s}{L_0} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.46)$$

- $x = x(s)$: sapendo che $dx/ds = dx/dp \cdot dp/ds$ e che dx/dp è fornito in termini di T dall'equazione (2.42a), premettendo che dp/ds è anche esso esprimibile in termini di T a partire dalla (2.43), è possibile ottenere:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{E \cdot A_0} + \frac{H}{\left[H^2 + \{V - W \cdot s/L_0\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.47)$$

che integrata diviene:

$$x(s) = \frac{Hs}{E \cdot A_0} + \frac{H \cdot L_0}{W} \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{V}{H} \right) - \operatorname{asinh} \left(\frac{V - W \cdot s/L_0}{H} \right) \right] \quad (2.48)$$

- $y = y(s)$: in modo analogo a quanto fatto per la x si ottiene:

$$y(s) = \frac{W \cdot s}{E \cdot A_0} \left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2 \cdot L_0} \right) + \frac{H \cdot L_0}{W} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \left(\frac{V - W \cdot s / L_0}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (2.49)$$

Per completare la risoluzione del problema bisogna conoscere le reazioni H e V . Generalmente per la ricerca dei valori assunti da queste due grandezze vengono adottati metodi numerici, nel caso in esame è stato adottato il metodo di Newton-Raphson. Esso prevede, mediante iterazioni, di stimare il valore di una funzione x generica come

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Per problemi di stabilità dell'algoritmo, al posto di aggiornare ad ogni iterazione la derivata ne è stata utilizzata una unica, quella del punto x_0 .

Il sistema che verrà risolto sarà del tipo

$$H_{n+1} = H_n - \frac{1}{\det(\mathbf{J})} (h_{,V_0} \cdot l - l_{,V_0} \cdot h) \quad (2.50)$$

$$V_{n+1} = V_n - \frac{1}{\det(\mathbf{J})} (-h_{,H_0} \cdot l + l_{,H_0} \cdot h) \quad (2.51)$$

dove:

- l è la distanza orizzontale individuata in figura 2.5, pari a

$$l = \frac{H \cdot s}{E \cdot A_0} + \frac{H \cdot L_0}{W} \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{V}{H} \right) - \operatorname{asinh} \left(\frac{V - W}{H} \right) \right]$$

- h è la distanza verticale, pari a:

$$h = \frac{W \cdot L_0}{E \cdot A_0} \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{H \cdot L_0}{W} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left\{ 1 + \left(\frac{V - W}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$$

- $l_{,H_0}$ è la derivata della funzione l rispetto alla variabile H calcolata nel punto (H_0, V_0) e vale

$$l_{,H_0} = \frac{L_0}{W} \cdot \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{V_0}{H_0} \right) - \operatorname{asinh} \left(\frac{V_0 - W}{H_0} \right) \right) + \frac{L_0}{E \cdot A_0} + \frac{H_0 \cdot L_0}{W} \left(\frac{V_0 - W}{H_0^2 \cdot \left(\frac{(V_0 - W)^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} - \frac{V_0}{H_0^2 \cdot \left(\frac{V_0^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} \right)$$

- $l_{,V_0}$ analogamente è la derivata della funzione l rispetto alla variabile V calcolata nel punto (H_0, V_0) e vale

$$l_{,V_0} = \frac{H_0 \cdot L_0}{W} \left(\frac{1}{H_0 \cdot \left(\frac{V_0^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} - \frac{1}{H_0 \cdot \left(\frac{(V_0 - W)^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} \right)$$

- $h_{,H_0}$, definita come sopra e vale

$$h_{,H_0} = \frac{L_0}{W} \left(\left(\frac{V_0^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2} - \left(\frac{(V_0 - W)^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2} \right) + \frac{H_0 \cdot L_0}{W} \left(\frac{V_0 - W}{H_0^3 \cdot \left(\frac{(V_0 - W)^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} - \frac{V_0}{H_0^3 \cdot \left(\frac{V_0^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}} \right)$$

- $h_{,V_0}$, in modo medesimo si ottiene

$$h_{,V_0} = \frac{H}{E \cdot A_0} + \frac{1}{\left(\frac{(V_0 - W)^2}{H_0^2} + 1 \right)^{1/2}}$$

- $\det(\mathbf{J})$ è il determinante della matrice jacobiana e vale

$$\det(\mathbf{J}) = l_{,H_0} \cdot h_{,V_0} - h_{,H_0} \cdot l_{,V_0}$$

Ottenute H e V con il metodo di Newton-Raphson si può considerare risolta la catenaria elastica, infatti tutte le grandezze di interesse sono ricavabili a partire da queste ultime.

2.4 Confronti fra catenaria inestensibile e parabola

Lo studio della letteratura esistente sull'analisi dei cavi mostra come il profilo parabolico abbia suscitato maggiore attenzione rispetto alla catenaria. Prescindendo dalla semplicità offerta dalla parabola, ciò è dovuto essenzialmente a due motivazioni:

- in un ponte sospeso la componente prevalente dei carichi agenti sul cavo portante è il peso del ponte stesso, il quale è effettivamente distribuito lungo l'orizzontale;
- la differenza fra le due configurazioni risulta piuttosto piccola per gli usuali rapporti freccia/luce delle strutture civili.

La figura 2.6 mostra come nel caso di funi molto tese le due soluzioni tendano ad avvicinarsi, si cita qui nuovamente Galileo: *“Ma più voglio dirvi, recandovi insieme meraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizzonte, facendo pendere*

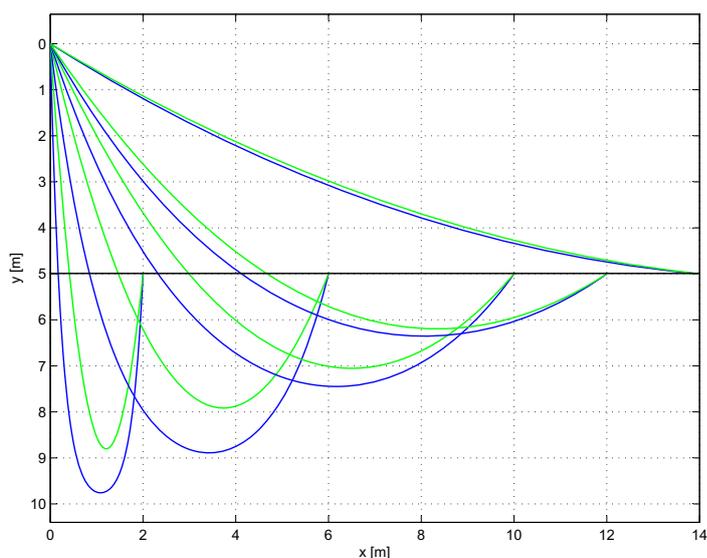


Figura 2.6: Confronto fra catenaria e parabola.

una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenazza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr. 45, la catenella camina quasi ad unguem sopra la parabola”.

2.5 Confronti fra le catenarie

All'interno di questo paragrafo verranno riproposte delle analisi che permettono di validare il codice e comprendere maggiormente il comportamento della catenaria.

2.5.1 Catenaria elastica e catenaria inestensibile

Per validare il codice sono state eseguiti dei test con Straus, che hanno restituito medesimi regimi di spostamento e sforzo, e dei confronti tra i due tipi di catenaria.

Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti confrontando i dati del programma Fortran, catenaria elastica avente modulo di Young E molto elevato, e Matlab, con il quale si è risolto il problema di catenaria inestensibile.

Per il tracciamento dei grafici si è preso in considerazione un cavo di lunghezza $L = 30m$, avente sezione pari a $A = 3135mm^2$ e peso specifico $\gamma = 25518.34N/m^3$. I due grafici possono essere visti come un cavo vincolato nel nodo di coordinate $(0,0)$ tirato dall'altro estremo vincolato a correre sulla retta di equazione $y = -10m$. All'inizio la catenaria è lasca, arriva poi al punto di atteggiarsi come una retta quando l'ipotenusa diviene pari a L .

I risultati tra i due diversi codici, come evidente dai grafici, sono confrontabili tra loro ma per meglio comprendere la differenza che esiste verrà di seguito inserita

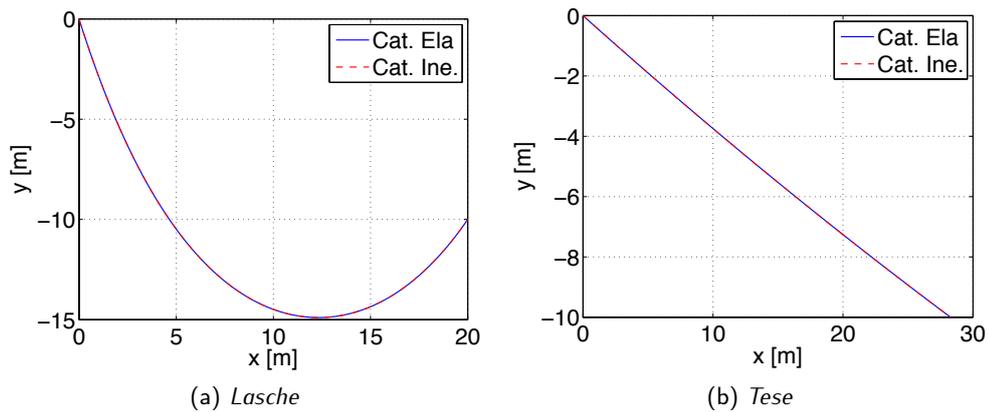


Figura 2.7: Catenarie.

una catenaria orizzontale, per la quale è noto che sotto peso proprio il punto avente maggiore spostamento è in mezzeria.

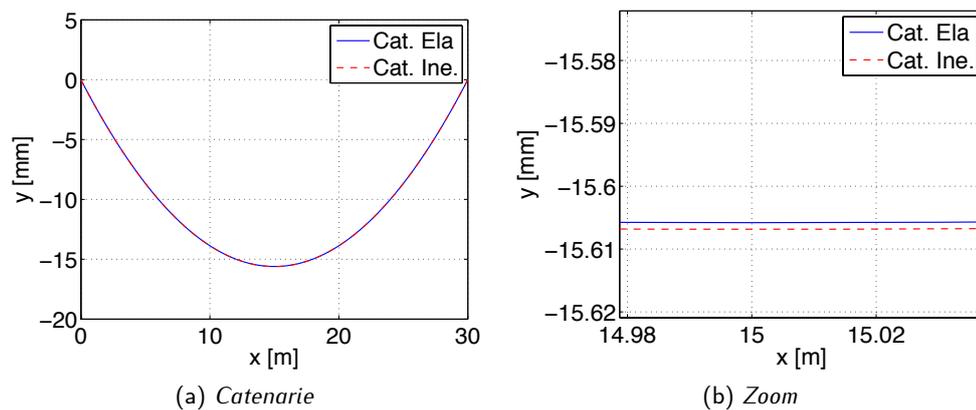


Figura 2.8: Catenarie tese su un piano orizzontale.

Come si può notare dall'immagine appena inserita, la differenza esistente tra le due catenarie si può definire inesistente e il codice Fortran può ben rappresentare la catenaria inestensibile.

2.5.2 Catenaria leggera e catenaria pesante

Validato il codice, si sono effettuati diversi confronti tra cavi pesanti e leggeri per meglio comprendere il comportamento di questo elemento strutturale.

Per tutti i successivi esempi verrà utilizzata una fune avente le seguenti caratteristiche:

- $\phi = 20mm$
- $E = 210GPa$
- cavo leggero: $g = 80N/m$, cavo pesante $g = 800N/m$

- lunghezza del cavo: $L = 80m$

2.5.2.1 Catenaria orizzontale

Si pensi di tirare una fune avente i due estremi posti sullo stesso piano, uno incernierato e l'altro collegato ad un appoggio scorrevole come nella seguente figura.



Figura 2.9: Tiro di un cavo lasco.

Al variare della distanza tra i due nodi si può diagrammare la variazione di rigidità intesa come rapporto tra la differenza di due tensioni successive e l'incremento di allungamento.

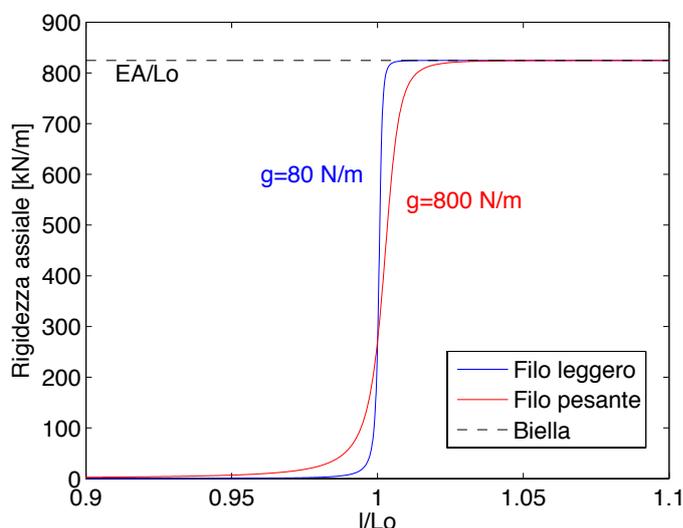


Figura 2.10: Andamento rigidità, appoggi allo stesso livello.

Come era possibile intuire, fintanto che il cavo non è teso la sua rigidità è pressoché nulla; nei dintorni dell'unità, cioè quando la fune raggiunge la sua estensione, essa aumenta fintanto che non eguaglia la rigidità di una biella.

Dal grafico 2.10 è possibile giungere anche alla conclusione che il cavo più pesante, come era naturale aspettarsi, raggiunge la rigidità della biella successivamente rispetto quello leggero.

2.5.2.2 Catenaria inclinata

In questo paragrafo verranno illustrati i risultati ottenuti da analisi simili alla precedente ma con cavi inclinati, di maggiore interesse ai fini della valutazione del comportamento di un ponte strallato.

I risultati illustrati in seguito sono stati ottenuti eseguendo la medesima analisi fatta

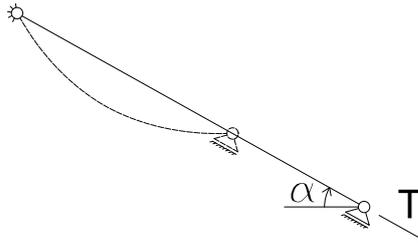


Figura 2.11: Schema delle analisi.

per il caso orizzontale, ma prendendo in considerazione una catenaria inclinata di α , fatto variare tra 5° e 85° .

In figura 2.12 sono messe a confronto le rigidità del medesimo cavo, assunto prima pesante e poi leggero, per tre differenti valori di α .

Come ci si aspettava, la rigidità di biella viene raggiunta dal cavo pesante succes-

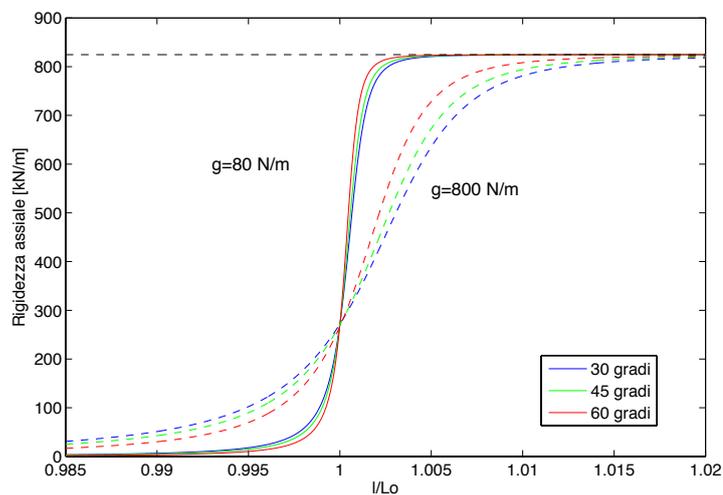


Figura 2.12: Andamento rigidità al variare dell'inclinazione del cavo.

sivamente rispetto al cavo leggero, qualsiasi sia l'inclinazione assunta dallo stesso. Un'ulteriore considerazione che si può fare è che più il cavo tende a diventare orizzontale più è necessario tirarlo per raggiungere la rigidità di biella. Questo comportamento è dovuto al fatto che l'effetto del peso proprio del cavo si fa risentire maggiormente. Nel seguente grafico vengono rappresentate le lunghezze che il cavo deve raggiungere per garantire una rigidità pari a quella fornita dalla biella.

Nelle condizioni di esercizio diagrammate in figura 2.13 solo un cavo non supera la tensione di snervamento. Per avere risultati di maggiore interesse, si sono ricercati i valori di tensione e di rigidità al variare dell'angolo di inclinazione α per un valore di l/L_0 pari a 1.001, cioè il cavo è stato allungato di 8 cm .

Dai grafici 2.14 è possibile comprendere come i cavi aventi angoli di inclinazione piccoli sono meno efficienti e talvolta non utilizzabili, l'influenza del peso proprio è tale da dover cambiare disposizione.

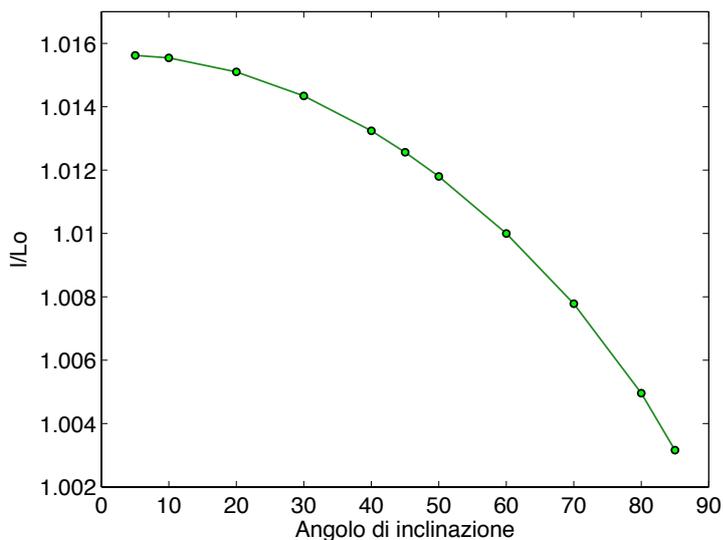


Figura 2.13: Rapporto delle lunghezze che si hanno in corrispondenza di rigidità pari alla biella in funzione dell'angolo di inclinazione. Si può notare che all'aumentare dell'inclinazione il cavo richiede una maggiore pretensione.

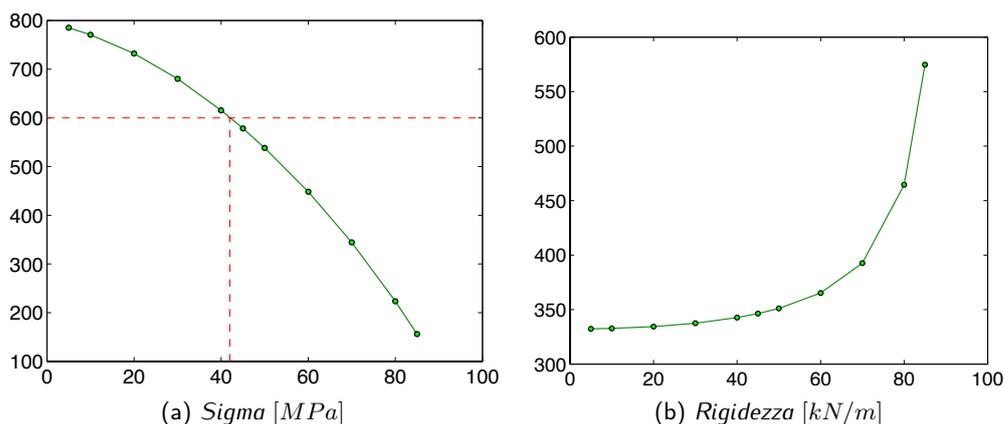


Figura 2.14: Andamento delle grandezze caratteristiche al variare dell'inclinazione. Si noti che alcuni cavi fino ai 40° non possono essere messi in opera in quanto lavorano ad una tensione maggiore di quella ammissibile.

2.6 Osservazioni conclusive

Dalle analisi fatte è possibile riconoscere che la modellazione di un filo pesante è tutt'altro che semplice, la presenza di non linearità geometriche obbliga a ricerche iterative, spesso influenzate anche da errori numerici dovute alla natura intrinseca delle equazioni.

Lo studio dei fili mediante catenaria elastica permette di evidenziare l'andamento della tensione, e quindi della rigidità, in funzione dell'allungamento del cavo stesso. Lo stesso procedimento viene solitamente adottato con catenarie o parabole inestensibili su alcuni libri di testo, anche se in contrasto con l'ipotesi di inestensibilità.

Si è poi mostrato come l'efficienza massima di un cavo venga raggiunta quando il suo comportamento tende a quello di una biella tesa. Ai fini pratici, pertanto, ci si chiede se sia necessario ricorrere a soluzioni esatte, o se sia necessario modellare il cavo come una semplice biella tesa, con la semplicità che ne consegue. A questo aspetto è dedicato il capitolo successivo.

2.7 La flessione nei fili

Per completare la trattazione dei fili, in questo paragrafo vengono analizzati gli effetti che la flessione ha sui cavi.

I cavi degli stralli solitamente son soggetti sia ad azioni di tipo assiale sia, localmente, ad azioni di tipo flessionale. Questi effetti, trascurabili lungo i tratti rettilinei, possono diventare rilevanti in corrispondenza di ancoraggi e zone di rinvio (selle). In sede teorica i punti di aggancio sono trattati come cerniere perfette. In realtà, in assenza di particolari sistemi articolati, essi tendono a comportarsi come incastri. Ne nasce di conseguenza un regime tensionale locale, dovuto alla deviazione del tracciato reale, dal tracciato teorico del cavo ancorato a cerniere. Tale distorsione induce curvature ed effetti flessionali nei tratti di estremità.

Per quantificarne gli effetti si prendano in considerazione le seguenti equazioni ricavate precedentemente per la parabola inestensibile:

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot H_g} x^2 + \left(\frac{h}{l} + \frac{gl}{2 \cdot H_g} \right) x \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{H_g}$$

in cui consideriamo g orizzontale, $\cos \alpha$ infatti è pari all'unità, e H_g è la componente orizzontale della tensione.

Applicando un incremento di carico $q(x) - g(x)$, in un generico punto x il filo ha uno spostamento verticale $v(x)$ e la componente orizzontale della tensione assume un valore H . In sintesi si ha:

Tabella 2.1: Tabella di sintesi.

Carico	$g(x)$	$q(x) - g(x)$	$q(x)$
Geometria del cavo	$y(x)$	$v(x)$	$\eta(x) = y(x) + v(x)$
Componente orizzontale della tensione	H_g	$H - H_g$	H
Reazioni vincolari verticali	V_g	$V - V_g$	V

Si considera un elemento di filo di lunghezza ds . Siano rispettivamente $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ azione assiale, taglio e momento agenti sulla generica sezione. Si ha:

$$N(x) = H \cos \theta(x) + V \sin \theta(x) \quad T(x) = -H \sin \theta(x) + V \cos \theta(x)$$

Per equilibrio alla traslazione in direzione verticale e per equilibrio alla rotazione, si ha:

$$(V + dV) - V + q(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

Per equilibrio alla rotazione, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$(M + dM) - M - V \cdot dx + H \cdot d\eta = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dM}{dx} - V + H \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (2.52)$$

Gli effetti flessionali nascono con l'incremento di carico $q(x) - g(x)$, che dà luogo all'incremento di spostamento $v(x)$, per cui è:

$$M(x) = -E \cdot J \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$

Derivando due volte la 2.52, si ottiene:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{dv}{dx} + H \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0$$

Sostituendo a $M(x)$ la sua espressione in funzione della curvatura, si ottiene:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - q(x) - H \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0$$

Essendo $\eta(x) = y(x) + v(x)$, si ha:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - H \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) + H \frac{d^2 y}{dx^2}$$

cioè

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - H \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) - H \frac{g}{H_g} \quad (2.53)$$

In molti casi, per attenuare gli effetti dovuti alla flessione, nei vincoli posti alle due estremità o lungo il cavo si fa seguire alla parte rigida una guida elastica, avente in genere una rigidità variabile $k(x)$.

In tal caso l'equazione 2.53 si aggiorna come segue:

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - H \frac{d^2 v}{dx^2} + k(x) \cdot v(x) = q(x) - H \frac{g}{H_g} \quad (2.54)$$

Si dividono entrambi i membri dell'equazione 2.54 per $E \cdot J$ e si pone $\lambda = \sqrt{H/EJ}$, ottenendo:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q(x)}{EJ} - \frac{H}{H_g} g$$

L'integrale di questa equazione:

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x)$$

è somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata:

$$v_h(x) = A + Bx + Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x} \quad (2.55)$$

e di un integrale particolare.

Soluzioni dirette sono ricavabili solo per casi particolari, consideriamo qui il caso di un cavo molto lungo (di lunghezza infinita) e teso.

Come prima, nel caso di carico uniformemente distribuito g si ha la seguente equazione

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot H_g} x^2 + \left(\frac{h}{l} + \frac{gl}{2 \cdot H_g} \right) x$$

in cui H_g è la componente orizzontale della tensione.

Con le stesse ipotesi, per l'azione di un carico applicato q la componente orizzontale della tensione è H_q e l'equazione del filo è:

$$\eta(x) = -\frac{q}{2 \cdot H_q} x^2 + \left(\frac{h}{l} + \frac{gl}{2 \cdot H_q} \right) x$$

Se il filo è vincolato all'ancoraggio per la configurazione iniziale associata al peso proprio g , per effetto del carico aggiunto q subisce una distorsione angolare locale $\Delta\varphi$, pari alla differenza tra gli angoli d'attacco delle due configurazioni proprie dei due fili:

$$v_p(x) = \eta(x) - y(x)$$

Sviluppando questa equazione si ottiene:

$$v_p(x) = \frac{q \cdot x}{2 \cdot H_q} (l - x) - \frac{g \cdot x}{2 \cdot H_g} (l - x)$$

$$\frac{dv_p(x)}{dx} = -\frac{q \cdot x}{H_q} + \frac{q \cdot l}{H_q} + \frac{g \cdot x}{H_g} - \frac{g \cdot l}{H_g}$$

$$\frac{d^2v_p(x)}{dx^2} = -\frac{q}{H_q} + \frac{g}{H_g} = -\Delta\chi$$

Con riferimento alla derivata prima, per $x = 0$ si ottiene la distorsione $\Delta\varphi$:

$$\frac{dv_p(0)}{dx} = \frac{q \cdot l}{H_q} - \frac{g \cdot l}{H_g} = \varphi_q(0) - \varphi_g(0) = \Delta\varphi$$

Per fili molto lunghi, deve essere, per $x \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$, $e^{\lambda x} \rightarrow \infty$ e quindi $B = 0$ e $C = 0$. Ne segue:

$$v_h(x) = A + De^{-\lambda x} \quad \frac{dv_h(x)}{dx} = -\lambda De^{-\lambda x} \quad \frac{d^2v_h(x)}{dx^2} = \lambda^2 De^{-\lambda x}$$

Per $x = 0$, dalla condizione

$$\frac{dv(0)}{dx} = \frac{dv_h(0)}{dx} - \frac{dv_p(0)}{dx} = -\lambda De^{-\lambda 0} + \Delta\varphi = 0$$

si ottiene:

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\lambda}$$

$$\frac{d^2v_p(x)}{dx^2} = -\frac{q}{H_q} + \frac{g}{H_g} = -\Delta\chi$$

$$M(x) = EJ \frac{d^2v_p(x)}{dx^2} = \Delta\varphi \sqrt{HEJ} e^{-\lambda x} + \Delta\chi EJ$$

Con questa equazione si ottiene l'andamento dei momenti flettente sul filo. Il massimo del momento si avrà all'attacco, per effetto della distorsione impressa. Poi segue un rapido smorzamento. Va comunque verificato che l'incremento di sollecitazione che si aggiunge alla trazione del filo non crei stati di sovrasollecitazioni locale.

Alcuni produttori di cavi per ponti strallati tengono conto di questi effetti locali e offrono ancoraggi pensati ad hoc per limitare le tensioni e oviare problemi di rottura.

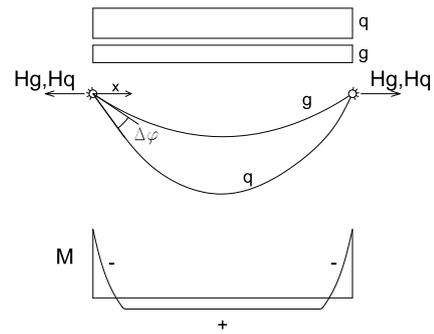


Figura 2.15: Struttura di riferimento.

Capitolo 3

La modellazione dello strallo e la determinazione dei tiri

Nel capitolo precedente si sono ripercorse le soluzioni storicamente sviluppate per lo studio della fune pesante, partendo dalla soluzione parabolica sino ad arrivare alla catenaria elastica. Quest'ultima permette di evidenziare il comportamento meccanico e, in particolare, evidenzia come l'efficienza massima del cavo si ha quando questo lavora come una biella nella quale, grazie all'elevata tensione, il peso proprio è trascurabile.

Questo capitolo riprende tale concetto e mostra come, ai fini pratici, lo studio di una struttura strallata possa essere affrontato senza considerare la non linearità geometrica e operando in piccoli spostamenti. Ciò semplifica notevolmente tutte le fasi progettuali perché permette di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

3.1 Calcolo del tiro negli stralli

Si mette in evidenza il metodo utilizzato comunemente per il calcolo dei tiri da assegnare agli stralli.

Esso prevede un'analisi in piccoli spostamenti, con conseguente sovrapposizione degli effetti, avente lo scopo di annullare gli spostamenti, siano essi verticali o orizzontali, all'attacco degli stralli. Generalmente si annullano gli spostamenti verticali, si portano a 0 quelli orizzontali nel caso degli stralli di riva (questi cavi hanno lo scopo di mantenere la verticalità delle antenne).

Si prenda in esame la struttura a lato, una trave isostatica sottoposta a carico uniforme alla quale si è agganciato uno strallo in modo da poter annullare lo spostamento in mezzeria. Il cavo verrà per semplicità modellato come una biella, ma ai fini della comprensione del problema questo non farà differenza.

L'obiettivo di quest'analisi è la ricerca della pre-tensione da attribuire al cavo in modo tale che lo spostamento in mezzeria sia nullo. Per fare ciò

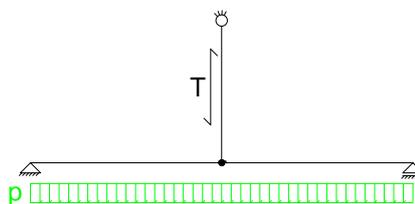


Figura 3.1: Struttura di riferimento.

verranno analizzate due diverse strutture, la prima sottoposta solo al carico distribuito e la seconda avente lo strallo al quale è applicata una tensione unitaria.

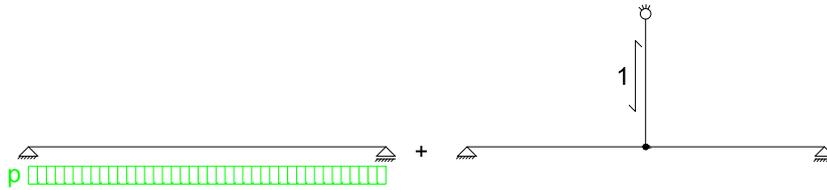


Figura 3.2: Strutture ausiliarie.

Risolvendo le due strutture è possibile determinare gli spostamenti in mezzzeria, rispettivamente s_0 e s_T , nelle due configurazioni. L'obiettivo è annullare lo spostamento perciò

$$T \cdot s_T - s_0 = 0$$

da cui

$$T \cdot s_T = s_0 \quad \longrightarrow \quad T = \frac{s_0}{s_T}$$

Dove T è il tiro da applicare al cavo per far sì che lo spostamento in mezzzeria si annulli.

È possibile fare il medesimo ragionamento anche nel caso di più stralli. Si consideri la figura accanto, in questo caso le strutture ausiliarie da risolvere sono tre, quella soggetta al solo carico e le due caratterizzate dalla presenza di un singolo strallo con pretensione unitaria, e gli spostamenti da annullare sono due.

Le equazioni risolventi in questo caso sono

$$T_1 \cdot s_1^1 + T_2 \cdot s_2^1 - s_0^1 = 0$$

$$T_1 \cdot s_1^2 + T_2 \cdot s_2^2 - s_0^2 = 0$$

riscrivibili intuitivamente come

$$\begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{s}_0$$

Nel caso generale, a n stralli, è possibile scrivere analogamente un sistema di n equazioni in n incognite, che permette di determinare il valore di tiro da assegnare ad ogni singolo cavo, avente la seguente generica espressione

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{s}_0$$

dove \mathbf{M} è la matrice degli spostamenti dovuti alle pretensioni unitarie degli stralli, \mathbf{t} è il vettore dei tiri incogniti e \mathbf{s}_0 è il vettore dei termini noti, ovvero gli spostamenti dovuti ai carichi esterni. Invertendo la matrice è possibile ricavare il gruppo di pretensioni da applicare agli stralli per garantire tutti gli spostamenti nulli.

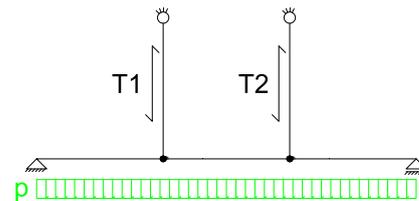


Figura 3.3: Struttura di riferimento con due stralli.

3.2 La modellazione dello strallo

Si presenta un semplice esempio di struttura strallata e si confrontano tra loro tre modellazioni differenti per lo strallo: biella lineare, biella non lineare e catenaria.

3.2.1 Un esempio semplice: la mensola

È qui analizzata una semplice mensola incastrata in cui l'estremo è trattenuto da uno strallo progettato per tenere fermo il punto di aggancio stesso.

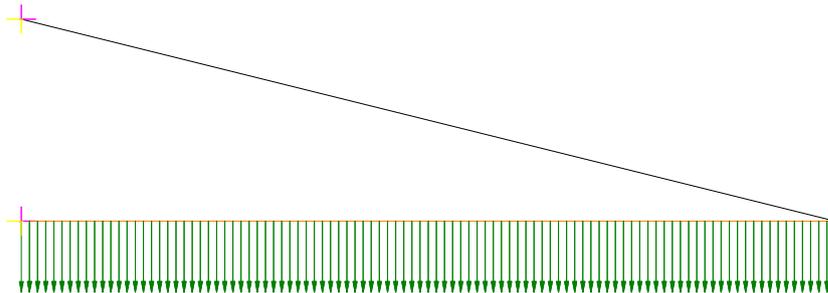


Figura 3.4: Mensola analizzata.

La mensola è lunga $20m$ e la cerniera che vincola lo strallo a terra è posta $5m$ sopra l'incastro della stessa, in questo modo viene analizzato uno dei cavi che risente maggiormente del peso proprio. Le caratteristiche degli elementi sono racchiuse nella seguente tabella.

	Mensola	Strallo
Area [m^2]	4.6364	$3135 \cdot 10^{-6}$
Inerzia [m^4]	0.52107438	–
Modulo elastico [Pa]	$3.0 \cdot 10^{10}$	$1.63 \cdot 10^{11}$
Densità [kg/m^3]	–	8230

Non è stato assegnato un peso alla trave in quanto è stato applicato un carico distribuito di intensità pari a $q = 120000N/m$.

Per determinare la pretensione nello strallo si sono analizzate la configurazione con il carico distribuito e quella con pretensione nello strallo pari a $100000N$, le quali restituiscono i risultati di figura 3.5 e 3.6.

Ottenuti i due spostamenti all'estremità della mensola si ottiene il coefficiente moltiplicativo per la pretensione come

$$\gamma = \frac{-s_p}{s_T}$$

La tensione da applicare allo strallo per ottenere uno spostamento all'estremo nullo, o pressoché tale, è $T = \gamma \cdot 100000N$.

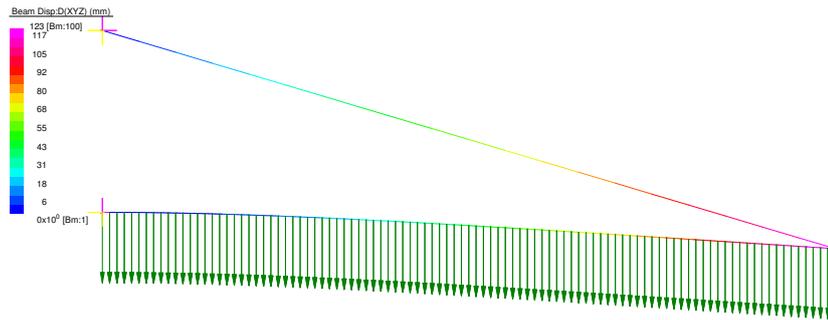


Figura 3.5: Spostamenti per il carico distribuito.

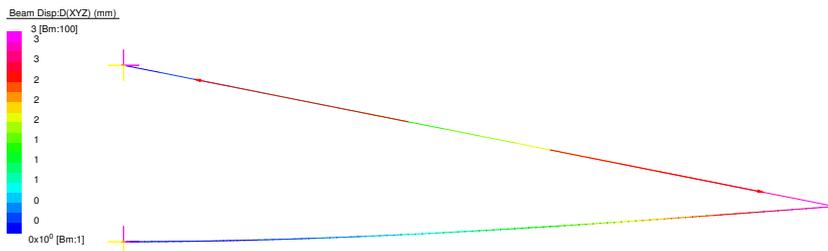
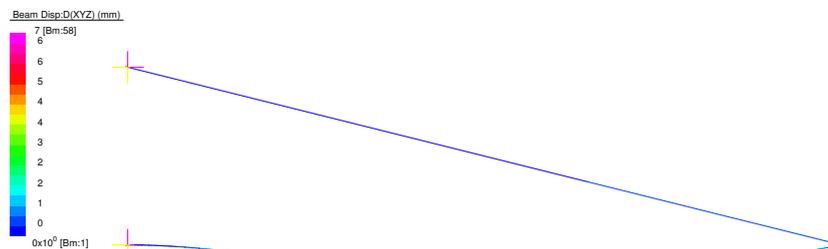


Figura 3.6: Spostamenti per la pretensione.

Applicando la tensione così ottenuta allo strallo e combinando l'effetto di quest'ultimo con il carico distribuito si ottiene la seguente distribuzione di spostamenti. Come si può notare lo spostamento del punto terminale della mensola è nullo.

Figura 3.7: Spostamenti per la combinazione di q e T .

Per applicare la medesima pretensione allo strallo modellato mediante catenaria è stato necessario determinare la lunghezza iniziale dello stesso come

$$l_0 = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \frac{l}{1 + \frac{T}{E \cdot A}}$$

La lunghezza così determinata risulta $l_0 = 20.4664m$.

I confronti tra biella e catenaria sono stati effettuati confrontando la risposta dello strallo ad un carico di $600N$ viaggiante sulla mensola

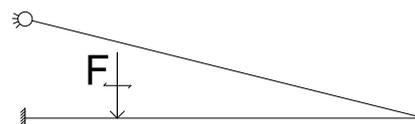


Figura 3.8: Carico viaggiante sulla mensola.

stessa. Nei grafici seguenti vengono rappresentati gli spostamenti per tre differenti posizioni della forza concentrata.

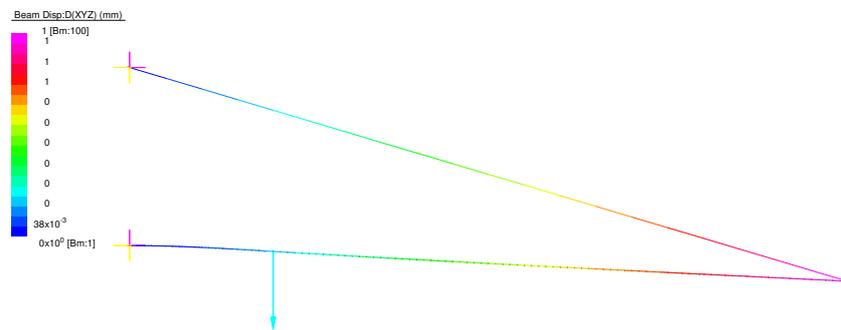


Figura 3.9: Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 21.

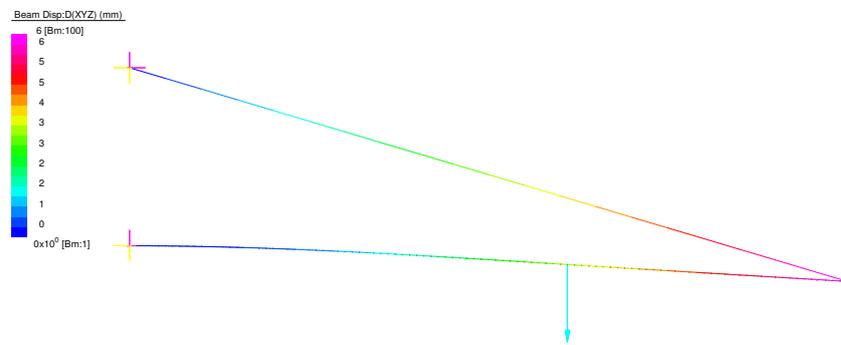


Figura 3.10: Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 62.

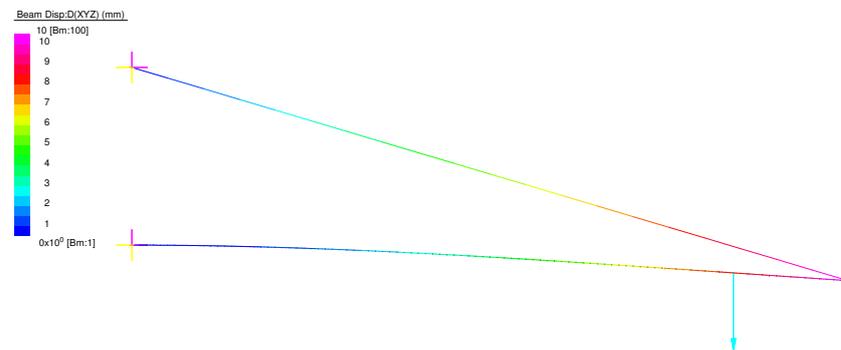


Figura 3.11: Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 85.

Sono state effettuate tre differenti analisi, bielle lineari, bielle con analisi non lineare e catenaria. Come si può notare dai grafici, sia in termini di sforzi interni che in termini di spostamento, le tre differenti analisi portano a risultati paragonabili tra loro.

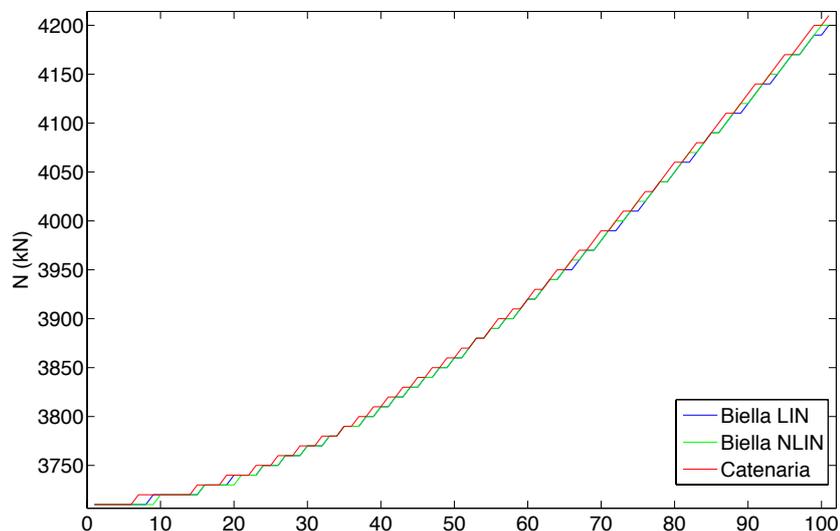


Figura 3.12: Linea di influenza dell'azione assiale dello strallo, funzione delle posizioni assunte dal carico viaggiante.

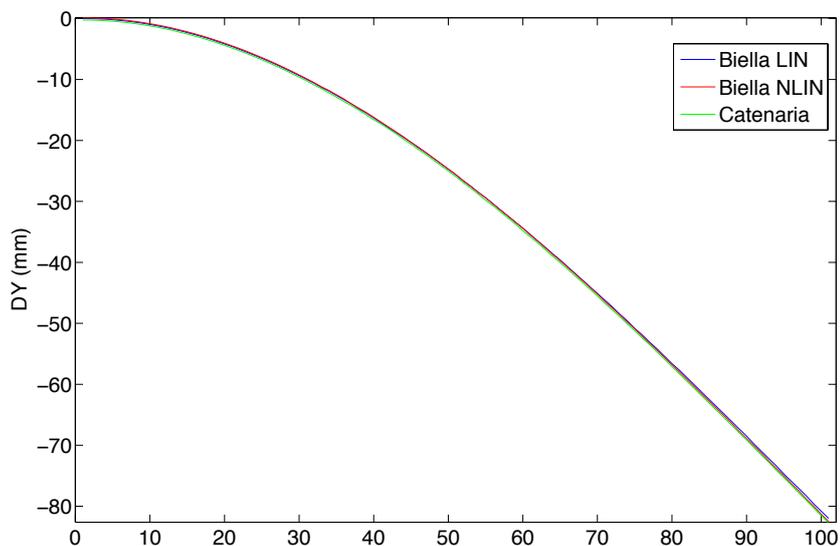


Figura 3.13: Linea di influenza dello spostamento del nodo finale dello strallo, funzione delle posizioni assunte dal carico viaggiante.

Le stesse analisi e il tracciamento delle linee di influenza sono state effettuate anche nel caso di attacco dello strallo posto 10m sopra la mensola. I risultati ottenuti sono anche essi paragonabili come nel caso precedente.

3.2.2 Il ponte strallato

Ulteriori indagini sono state effettuate su un ponte strallato oggetto di studio in [18]. L'articolo evidenzia le differenze esistenti tra le linee di influenza per il ponte in caso di stralli non pretesi e pretesi, per analisi lineari e non.

Utilizzando i dati dello stesso si sono effettuati dei confronti tra analisi lineare e non, con stralli modellati mediante bielle.

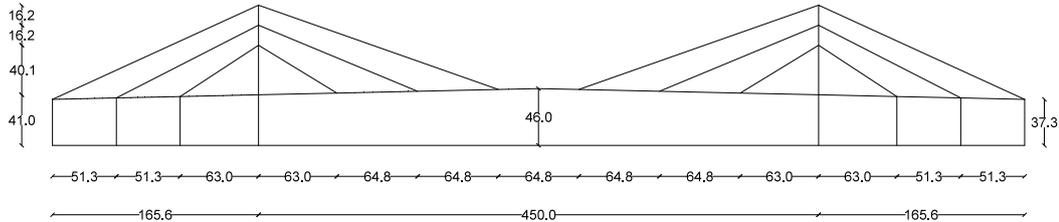


Figura 3.14: Geometria del ponte.

Tabella 3.1: Dati geometrici degli elementi del ponte.

Elemento	Area trasversale [m ²]	Momento d'inerzia [m ⁴]	Modulo di elasticità [Pa]	Densità [N/m ³]
1-116	1.565	4.14	21.0E10	85000
117-121	50.0	26.05	1.5E10	23544
141-142	75.0	1071.25	1.5E10	23544
123-128	0.460	0.78	21.0E10	85000
129-132	0.0667	—	16.5E10	85000
133-136	0.0950	—	16.5E10	85000
137-140	0.1259	—	16.5E10	85000

La numerazione degli elementi è presente in figura 3.15.

Definita la geometria si sono calcolati i tiri partendo dalle seguenti configurazioni fondamentali riportate nelle seguenti figure (fig.3.16 - fig.3.21). Sono stati riportati solo gli spostamenti dei primi sei stralli in quanto il ponte è simmetrico.

A partire da queste configurazioni si sono determinati i tiri degli stralli risolvendo il seguente sistema

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{s}_0 \\
 & \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 & s_4^1 & s_5^1 & s_6^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 & s_4^2 & s_5^2 & s_6^2 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 & s_4^3 & s_5^3 & s_6^3 \\ s_1^4 & s_2^4 & s_3^4 & s_4^4 & s_5^4 & s_6^4 \\ s_1^5 & s_2^5 & s_3^5 & s_4^5 & s_5^5 & s_6^5 \\ s_1^6 & s_2^6 & s_3^6 & s_4^6 & s_5^6 & s_6^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \\ s_3^0 \\ s_4^0 \\ s_5^0 \\ s_6^0 \end{bmatrix} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Gli spostamenti s_1 , s_2 e s_3 rappresentano gli spostamenti orizzontali degli attacchi dei rispettivi stralli all'antenna, mentre s_4 , s_5 e s_6 rappresentano gli spostamenti verticali dei nodi di attacco all'impalcato.

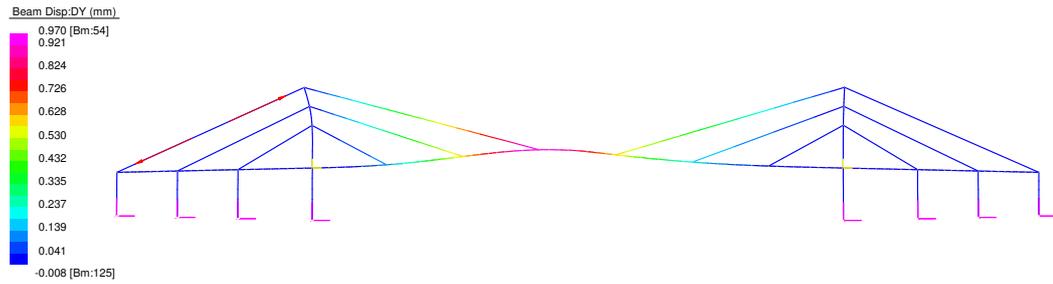


Figura 3.16: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 1.

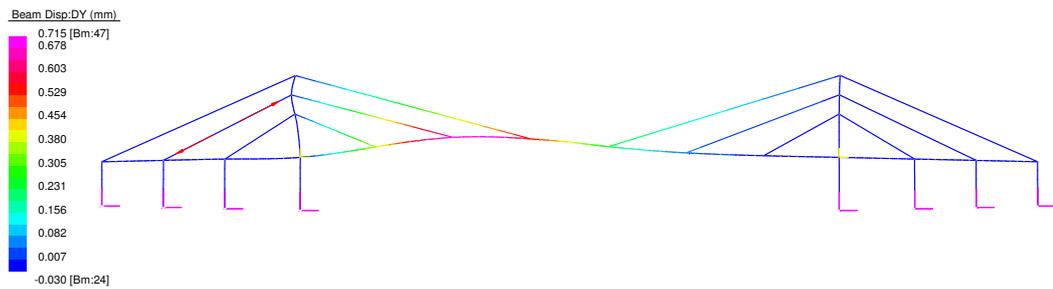


Figura 3.17: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 2.

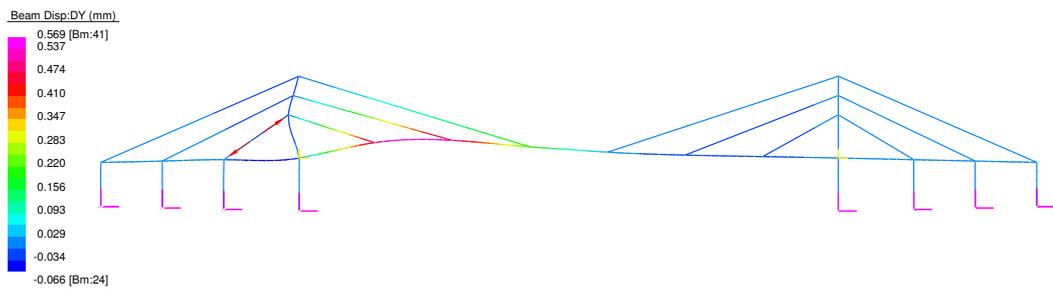


Figura 3.18: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 3.

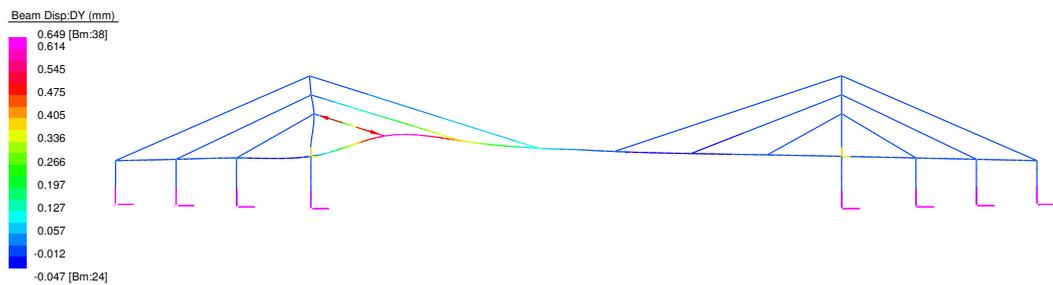


Figura 3.19: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 4.

Invertendo la matrice è possibile ottenere la soluzione del sistema e conseguentemente le tensioni da applicare agli stralli, ricordando che la struttura è simmetrica, perciò il valore di pretensione per lo strallo 1 andrà assegnato anche al numero 12.

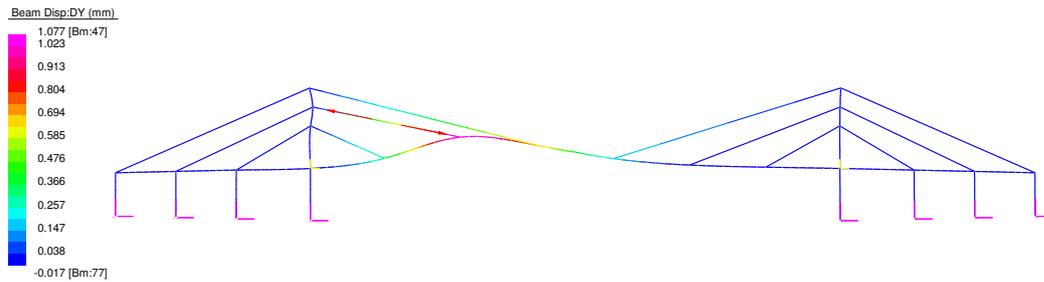


Figura 3.20: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 5.

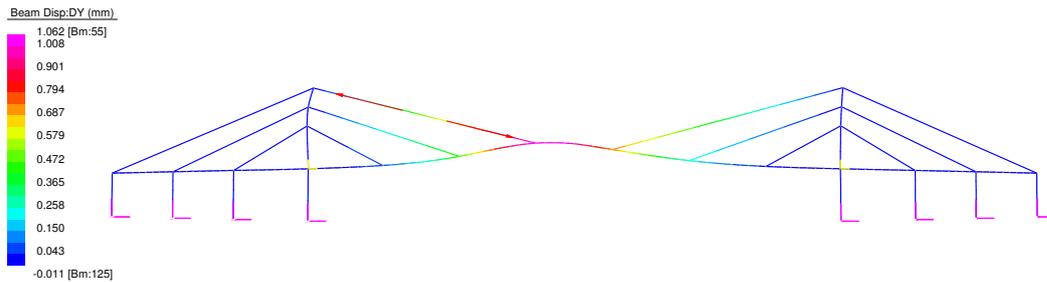


Figura 3.21: Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 6.

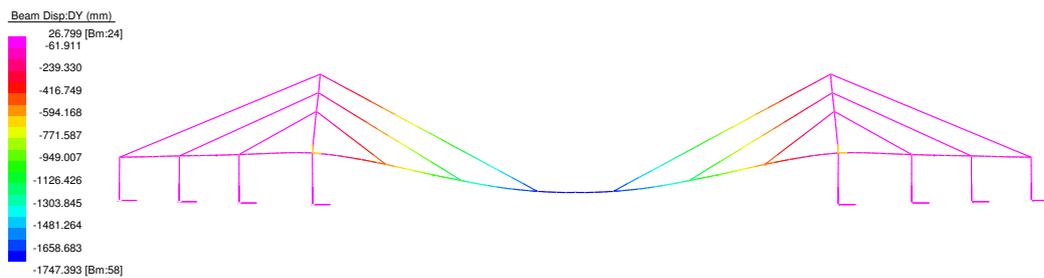


Figura 3.22: Spostamenti nel caso di peso proprio.

I valori dei tiri ottenuti sono:

$$\begin{array}{lll}
 T_1 = 37069kN & T_2 = 29677kN & T_3 = 24471kN \\
 T_4 = 18290kN & T_5 = 25159kN & T_6 = 31344kN
 \end{array}$$

In figura 3.24 è possibile vedere gli effetti della combinazione lineare delle pretensioni degli stralli unitamente alla presenza del peso proprio. Si può notare che i punti utilizzati per il calcolo delle pretensioni stesse risultano fermi.

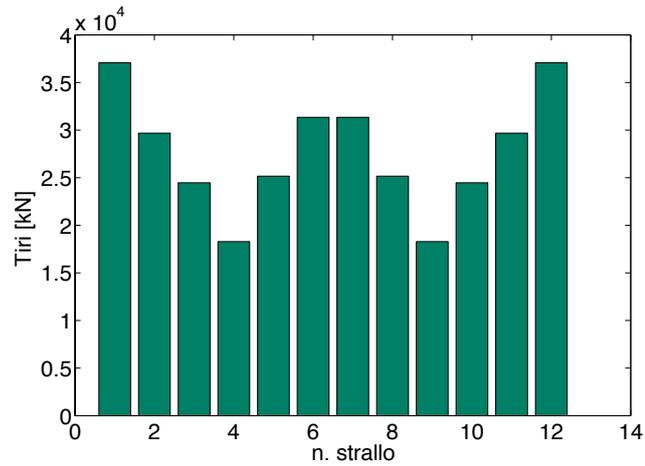


Figura 3.23: Istogramma rappresentante i tiri negli stralli.

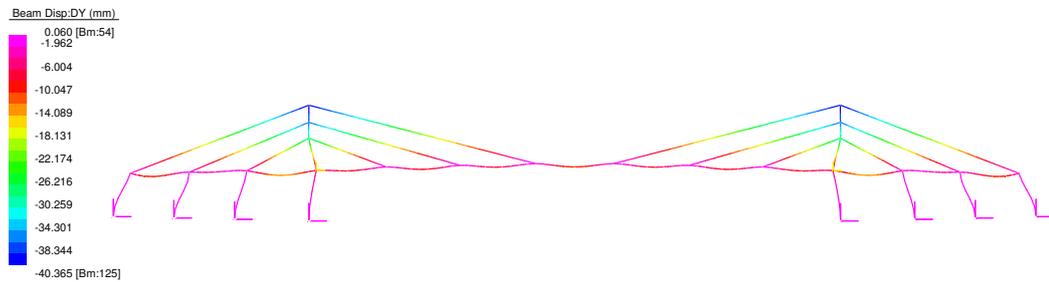


Figura 3.24: Spostamenti in presenza di peso proprio e pretensione degli stralli.

Il diagramma 3.26 rappresenta i momenti flettenti caratterizzanti l'impalcato del ponte, esso ricorda il diagramma di una trave continua su più appoggi. Concettualmente i cavi vengono progettati per annullare gli spostamenti dei punti di aggancio, proprio come un appoggio semplice.

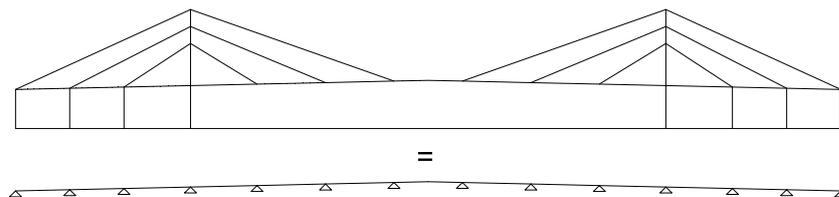
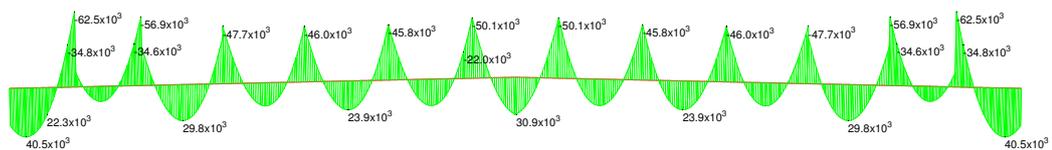


Figura 3.25: Equivalenza tra ponte strallato e trave continua.

Figura 3.26: Andamento dei momenti all'interno dell'impalcato, $[kN \cdot m]$.

Definite le pretensioni è possibile analizzare il ponte nella sua interezza e definire le diverse combinazioni di carico che permettono di tracciare le linee di influenza. Come per la mensola analizzata precedentemente, anche in questo caso vi è una forza viaggiante che percorre l'impalcato del valore pari a $1944kN$, come definito all'interno dell'articolo [18].

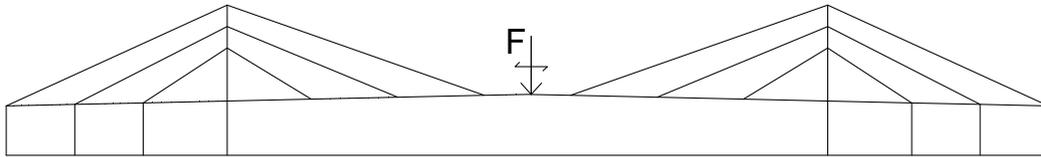


Figura 3.27: Carico viaggiante sul ponte.

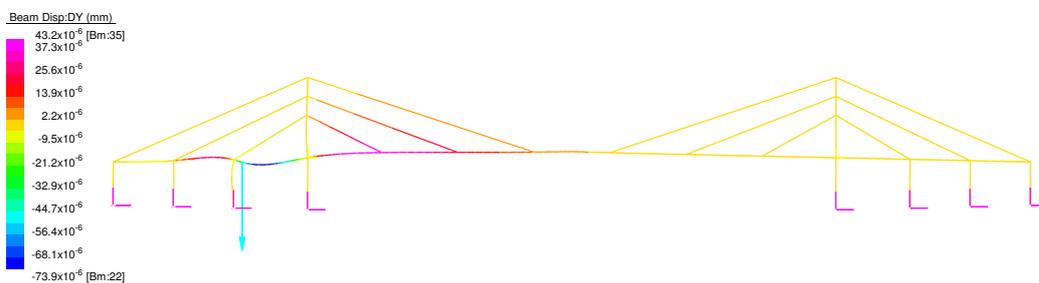


Figura 3.28: Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 20.

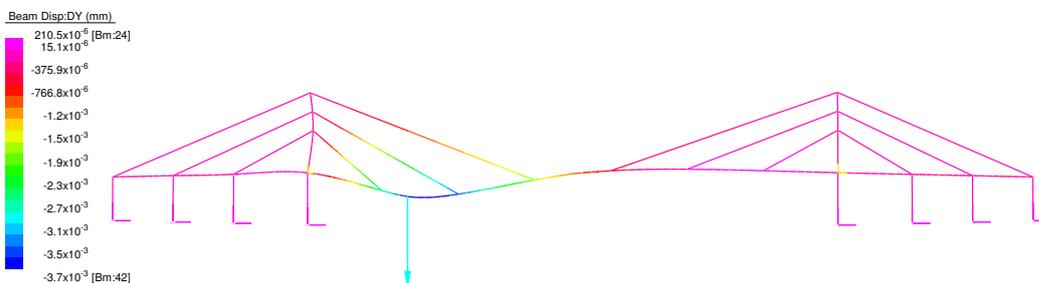


Figura 3.29: Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 40.

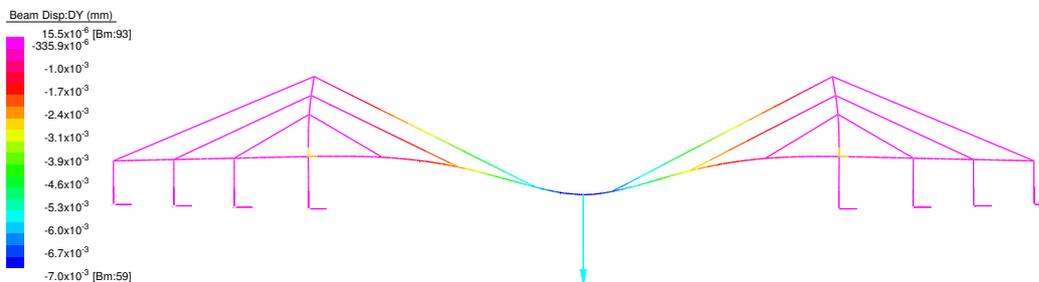


Figura 3.30: Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 60.

Nei grafici seguenti è possibile mettere a confronto le linee di influenza delle azioni assiali degli elementi 134 e 138, calcolate con analisi lineare e non.

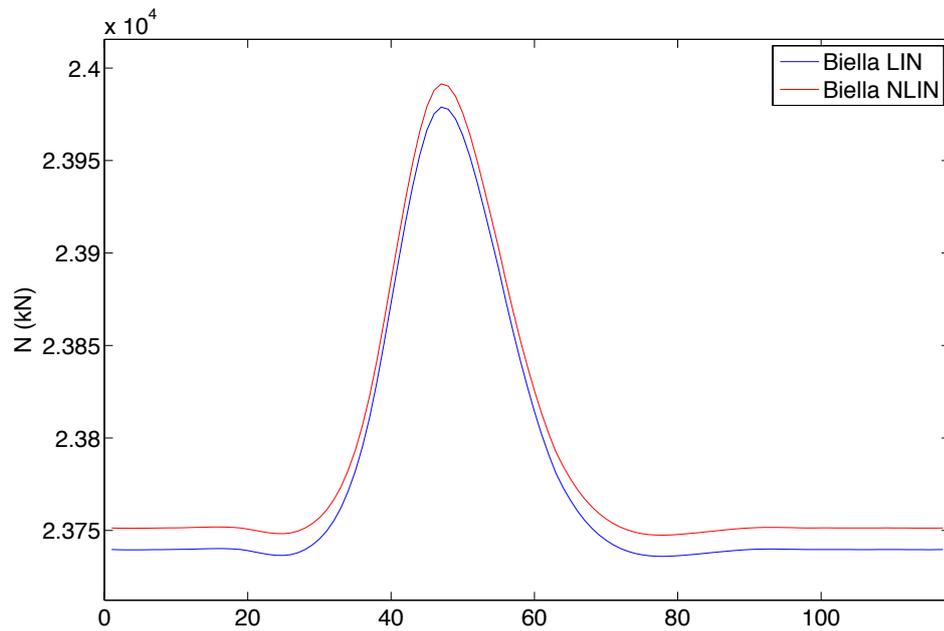


Figura 3.31: Linea di influenza dell'azione assiale all'interno dello strallo 134 in funzione della posizione assunta dal carico viaggiante.

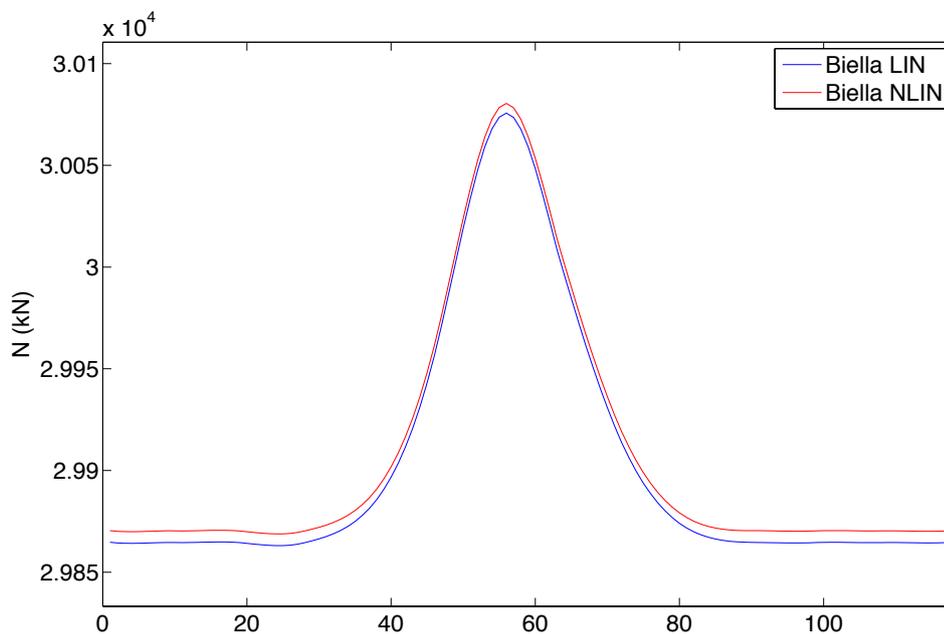


Figura 3.32: Linea di influenza dell'azione assiale all'interno dello strallo 138 in funzione della posizione assunta dal carico viaggiante.

Come si può notare anche in questo caso la linea di influenza calcolata con analisi non lineare è paragonabile a quella determinata mediante analisi lineare.

3.3 Sintesi dei risultati

Con le analisi fatte e con i risultati ottenuti, è possibile giungere alla conclusione che gli stralli possono essere modellati mediante l'utilizzo di bielle, anziché utilizzare catenarie.

Negli ultimi studi dedicati ai ponti strallati, tra cui [16], vi è la tendenza di utilizzare le catenarie per modellare i cavi. La maggior rappresentatività legata a questo elemento, può non portare ad una qualità maggiore dell'analisi in quanto più sensibile ad errori numerici.

L'utilizzo della catenaria, inoltre, non permette analisi lineari e preclude la possibilità di utilizzo della sovrapposizione degli effetti, risulta quindi proibitivo nella fase progettuale.

Come si può notare dai grafici 3.12 e 3.13, per la mensola, e 3.31 e 3.32, per il ponte, le curve ottenute mediante utilizzo di bielle e analisi lineare sono paragonabili alle altre. Questo porta a concludere che per tenere conto dei reali effetti sulla struttura è possibile effettuare analisi lineari amplificando le azioni sollecitanti sulla struttura stessa.

I problemi trattati in questo capitolo prevedevano un numero di condizioni pari al numero di incognite da ricavare. Nel caso in cui ci fossero più vincoli da rispettare la matrice M diverrebbe rettangolare; all'interno dell'ultimo capitolo verrà visto un metodo alternativo per risolvere questo tipo di problema.

Capitolo 4

Il codice genetico, ottimizzazione naturale

All'interno di questo capitolo verrà affrontato il tema dell'ottimizzazione e ne verrà spiegato l'algoritmo utilizzato per raggiungere questo obiettivo.

L'idea di ottimizzare una struttura è argomento sempre più affrontato data la crescente sensibilità dell'uomo per uno sviluppo sostenibile nel rispetto dell'ambiente e che non abbia impatti devastanti su panorami altrimenti piacevoli alla vista.



Figura 4.1: Il viadotto Millau in Francia.

Esistono diversi metodi per ottenere questo risultato, modelli euristici e non. Per questo elaborato è stato utilizzato un codice genetico, basato sull'idea dell'evoluzione naturale darwinista, il quale non richiede il calcolo di gradienti di nessun genere.

Tutte le considerazioni che seguono sono state fatte a seguito di un'ampia analisi della letteratura esistente, tra cui [1], [22] e [13].

4.1 Formulazione del problema di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione strutturale consiste nel trovare un set di variabili di progetto che ottimizzino uno o più obiettivi rispettando prefissati requisiti.

Nel caso di un singolo obiettivo, matematicamente il problema può essere così formulato:

Determinare un vettore $x \in]x^-; x^+]$ che ottimizzi il valore di una funzione obiettivo $f(x)$, rispettando alcune uguaglianze $h(x) = 0$ e/o disuguaglianze $g(x) \leq 0$ che rappresentano i vincoli del problema.

Considerato il problema di minimizzazione, si può scrivere:

$$\min_{x \in D} f(x), \text{ dove } D = \{x | x^- \leq x \leq x^+, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \quad (4.1)$$

che, in generale, rappresenta un problema di programmazione non lineare, [4].

In questo caso è possibile notare che il dominio della soluzione D è vincolato, nei paragrafi successivi si vedrà il passaggio ad un dominio illimitato.

4.2 Algoritmi genetici

Gli algoritmi genetici appartengono alla classe di metodi di ottimizzazione basati sulla ricerca stocastica. Introdotti nel 1975 da J.H. Holland, essi si fondano sull'idea che ogni individuo ha caratteristiche proprie identificate da un patrimonio genetico, il genotipo, e che solo gli individui con le caratteristiche più adatte all'ambiente sopravvivono. La codifica del genotipo da luogo al fenotipo.

I due principi fondamentali dell'evoluzione sono la variazione genetica e la selezione naturale. Per far sì che la popolazione possa evolversi, gli individui che la costituiscono devono avere un'ampia varietà di genotipo.

L'idoneità di un individuo rispetto all'ambiente con il quale deve relazionarsi è tipicamente definita come la probabilità che l'organismo viva abbastanza per riprodursi o come funzione del numero di individui che genera.

I meccanismi generatori della varietà del genotipo sono sostanzialmente due, il primo vede la combinazione, mediante riproduzione sessuale, dei geni di due genitori, il secondo prevede la mutazione del genotipo del singolo individuo.

La possibilità o meno per un individuo, con un determinato genotipo, di diventare un genitore dipende dall'idoneità dello stesso valutata in base ad una opportuna funzione. Si comprenderà meglio questo concetto nei seguenti paragrafi in cui verrà analizzato l'algoritmo in ogni suo singolo passaggio.

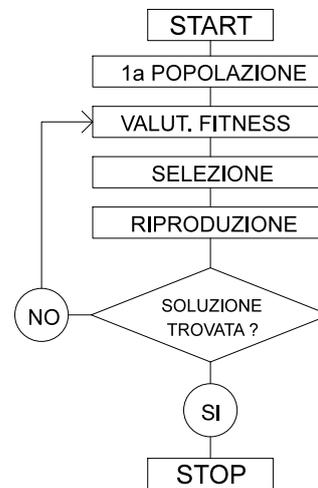


Figura 4.2: Flow Chart dell'algoritmo.

4.3 Struttura dell'algoritmo

L'algoritmo genetico si basa sostanzialmente su tre operazioni fondamentali:

- valutazione dell'idoneità di ogni individuo appartenente alla popolazione (calcolo della *fitness*);
- definizione degli elementi genitori mediante l'operatore di *selezione*;
- creazione di una nuova popolazione mediante gli operatori di *correlazione* e *mutazione*.

4.3.1 La popolazione

Prima di analizzare gli operatori utili a modificare la popolazione, verrà qui descritto cosa si intende per insieme di individui e quali sono le caratteristiche degli stessi. Una popolazione è un insieme di cromosomi ognuno dei quali è caratterizzato da un genotipo. Il genotipo è l'insieme di geni, ognuno dei quali contiene un'informazione atta alla definizione del fenotipo.

Queste informazioni possono essere codificate mediante numeri binari o numeri reali. L'algorithmo scritto per risolvere il problema oggetto di questa tesi prevede una codifica di tipo binaria. Come si può vedere in figura 4.3, ogni gene è rappresen-

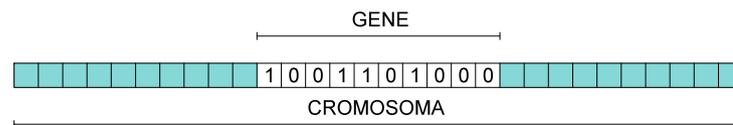


Figura 4.3: Il cromosoma, la rappresentazione di un individuo.

tato mediante un insieme di bit, il quale, decodificato, individua una caratteristica particolare, l'allele.

Ad ogni iterazione dell'algorithmo, i tre operatori lavorano sulla popolazione che, a causa della competizione, tende a preservare gli individui migliori [4].

Per far sì che ci sia evoluzione, cioè per permettere all'algorithmo di individuare il risultato più probabile del problema, gli individui che costituiscono la prima popolazione devono avere una ampia varietà di genotipi. Per garantire ciò, di solito, si crea la stessa mediante un algorithmo che genera numeri random.

Per evitare il manifestarsi di zone ad elevata densità di individui a discapito di altre completamente sprovviste, si è operata una miglioria, come suggerito in [13]. Solo la metà della popolazione viene creata mediante numeri random, l'altra come complemento della prima, cioè se l'individuo i in posizione j ha valore 1, l'individuo $i + N/2$ in posizione j avrà valore 0, dove con N si definisce il numero totale di cromosomi componenti la popolazione.

4.3.2 La selezione

Probabilmente è l'operatore più importante dell'evoluzione. La selezione permette di individuare i genitori che concorreranno alla creazione di una nuova popolazione migliore rispetto la precedente.

Lo scopo della selezione è sicuramente quello di individuare i genitori migliori, più adatti per le condizioni di ambiente in esame, definendo il corretto bilanciamento tra individui con un ottimo valore di fitness e gli individui che stanno nella media. La scelta di prediligere un elevato numero di individui con caratteristiche ottimali pregiudica infatti la diversità necessaria per le evoluzioni seguenti, mentre il caso contrario comporta una lenta risoluzione del problema.

Esistono diversi metodi per effettuare la selezione, il più famoso è il metodo della roulette. La ruota delle roulette viene suddivisa in settori più o meno ampi in proporzione al valore della funzione fitness, più un individuo è adatto alla sopravvivenza maggiore sarà la probabilità che questo venga scelto.

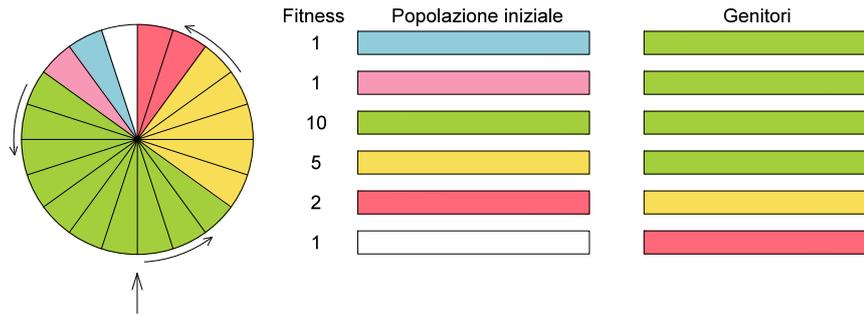


Figura 4.4: La selezione mediante roulette.

In alternativa è possibile utilizzare la selezione mediante torneo, selezionati due o più cromosomi in modo casuale, l'individuo con fitness migliore entrerà a far parte degli elementi che diventeranno genitori. Questo passaggio viene ripetuto un numero di volte tale da completare la popolazione di elementi genitori.

Per l'algoritmo oggetto di tesi è stata utilizzata una selezione del tipo roulette, in cui la ruota è stata suddivisa in modo proporzionale rispetto al rank dell'individuo. In questo modo il rank è stato calcolato una volta sola per tutte le iterazioni nel seguente modo:

$$P_n = \frac{N_{keep} - n + 1}{\sum_{n=1}^{N_{keep}} n}$$

I ranks vengono attribuiti dopo aver messo in ordine decrescente i valori di fitness, a partire dal migliore. In questo modo l'individuo con grado di adattabilità maggiore avrà probabilità più alta di avere più copie dello stesso.

4.3.3 Il crossover

Definiti gli elementi genitori, si generano gli offspring, o elementi figli che comporranno la generazione successiva, mediante combinazione e mix delle caratteristiche dei genotipi.

Non tutte le coppie di genitori concorrono alla creazione di nuovi figli, la combinazione o meno dei genotipi è subordinata ad un test di tipo random. Se il numero generato è inferiore al valore p_c , definito in input, allora vi sarà riproduzione, in caso contrario la coppia di genitori passerà alla generazione successiva.

Esistono diversi metodi per effettuare il crossover, i più comuni sono il *one-cut-point* e il *two-cut-point*, essi consistono nel tagliare in uno o due punti, scelti a caso, i due cromosomi genitori e scambiare tra essi le parti.

Il metodo adottato nell'elaborato in esame è di tipo uniforme, esso non prevede un numero prestabilito di punti in cui tagliare, ma è totalmente governato dalla casualità dei numeri random. Lo schema seguente permette una migliore comprensione di quello che si sta dicendo.

La selezione dei cromosomi genitori, della possibilità o meno di riproduzione e delle posizioni in cui applicare il crossover fanno parte della natura heuristica degli algoritmi genetici.

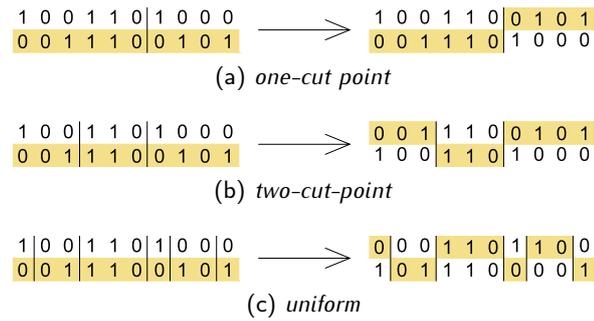


Figura 4.5: Tipi di crossover.

4.3.4 La mutazione

L'ultimo operatore, la mutazione, ha lo scopo di garantire che non vi sia una prematura perdita di materiale genetico durante la selezione e il crossover. Questa operazione si ottiene cambiando da 0 a 1, o viceversa, uno o più bit di un cromosoma, in una misura dipendente dalla probabilità di mutazione p_m , definita in input dall'utente.

Una probabilità di mutazione troppo elevata può compromettere l'analisi, in quanto vanifica le operazioni di selezione e crossover.



Figura 4.6: La mutazione.

4.4 La funzione obiettivo

In un problema di ottimizzazione strutturale, è possibile scegliere differenti quantità per definire la funzione obiettivo, ad esempio il peso complessivo, il peso, l'energia elastica deformativa.

Le strategie di ricerca come gli algoritmi genetici si rivelano particolarmente efficaci nello studio di problemi non vincolati, mentre spesso non sono in grado di trattare quelli in cui vi è la presenza di limiti.

Un modo per trattare i vincoli è quello di penalizzare le soluzioni non ammissibili, aggiungendo alla funzione obiettivo un termine $p(\mathbf{x}) \geq 0$ il cui valore è 0 nel caso in cui i limiti sono rispettati e positivo in caso contrario. Detta $f(\mathbf{x})$ la funzione obiettivo definita precedentemente, la nuova funzione da ottimizzare, funzione obiettivo penalizzata, sarà $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$.

In questo caso, il problema originale di ottimizzazione vincolata 4.1 viene così trasformato nella seguente forma non vincolata:

$$\min_{x \in E} \varphi(x), \text{ dove } E = \{x | x^- \leq x \leq x^+\} \quad (4.2)$$

La scelta di un'adeguata funzione $p(\mathbf{x})$ e di un adeguato operatore che combini $f(\mathbf{x})$ e $p(\mathbf{x})$ rappresenta un punto critico e influenza sia la robustezza che l'efficienza dell'algoritmo.

4.4.1 Funzione Fitness

L'idoneità di ogni individuo (fitness) può essere misurata tramite una funzione scalare $F(\mathbf{x}) \geq 0$ che rappresenta il grado di adattamento dell'individuo \mathbf{x} all'ambiente circostante E . La definizione della funzione fitness è differente in base al problema di ottimizzazione considerato, ma può essere legata alla funzione obiettivo penalizzata $\varphi(\mathbf{x})$ nel seguente modo:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x})_{Migl}}{\varphi(\mathbf{x})}$$

Trattando un problema di minimizzazione, $\varphi(\mathbf{x})_{Migl} = \min[\varphi(\mathbf{x})]$, da cui:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\min[\varphi(\mathbf{x})]}{\varphi(\mathbf{x})} \quad (4.3)$$

In questo modo, $F(\mathbf{x}) \in [0; 1]$ e, in particolare, $F = 1$ per l'individuo migliore nella popolazione.

4.4.1.1 Scaling

Per assicurare un equilibrio fra diversità nella popolazione e pressione di selezione, è fondamentale introdurre il concetto di scaling, ossia è necessario scalare la fitness degli individui in modo tale da evitare problemi di convergenza prematura dovuti alla presenza di superindividui, individui che cioè presentano una fitness molto alta rispetto a quella degli individui rimanenti. A tal fine, si introduce un *rapporto di saturazione* $0 \leq S \leq 1$ definito come:

$$S = \frac{F_{med}}{F_{max}} \quad (4.4)$$

dove F_{med} e F_{max} sono rispettivamente la media e la massima fitness, cioè:

$$F_{med} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p F(\mathbf{x}_k) \quad F_{max} = \max_{k=1, \dots, p} F(\mathbf{x}_k) \quad (4.5)$$

Il rapporto di selezione S è molto basso se nella popolazione sono presenti superindividui. In questo caso, assumendo una riproduzione proporzionale alla fitness, ne deriva una popolazione che tende a contenere solamente copie di questi superindividui. Ne segue una perdita della *diversità* della popolazione che porta ad un'incapacità esplorativa dell'algoritmo.

Al contrario, il rapporto di selezione S si presenta molto alto se gli individui presenti nella popolazione hanno fitness paragonabile. In questo caso, la popolazione si riproduce senza alterazioni ed è pertanto difficile esplorare i migliori individui. Si ha, in altre parole, una perdita della *pressione di selezione*. In entrambi i casi quindi, la strategia di ricerca può rivelarsi inefficace.

Uno fra i tanti modi possibili per evitare il problema esposto è quello di scalare linearmente la fitness per ottenere una nuova funzione $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ da utilizzare per regolare la riproduzione:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 + \phi_1 F(\mathbf{x}_k) \quad (4.6)$$

con:

$$\phi_0 = \frac{(S F_{max} - F_{med}) F_{med}}{S (F_{max} - F_{med})} \quad \phi_1 = \frac{(1 - S) F_{med}}{S (F_{max} - F_{med})} \quad (4.7)$$

In questo modo, la riproduzione avviene sempre ad uno stesso livello di saturazione. Affinchè $\phi(\mathbf{x})$ non assuma valori negativi, S non deve essere posto inferiore al seguente valore critico:

$$S_{cr} = \frac{F_{med} - F_{min}}{F_{max} - F_{min}} \quad (4.8)$$

che limita così il valore di ϕ a zero.

4.5 Benchmarks

Definiti i concetti che stanno alla base dell'algoritmo genetico, si riportano di seguito degli esempi utilizzati per validarli, essi sono stati presi da [13].

4.5.1 Ottimizzazione libera

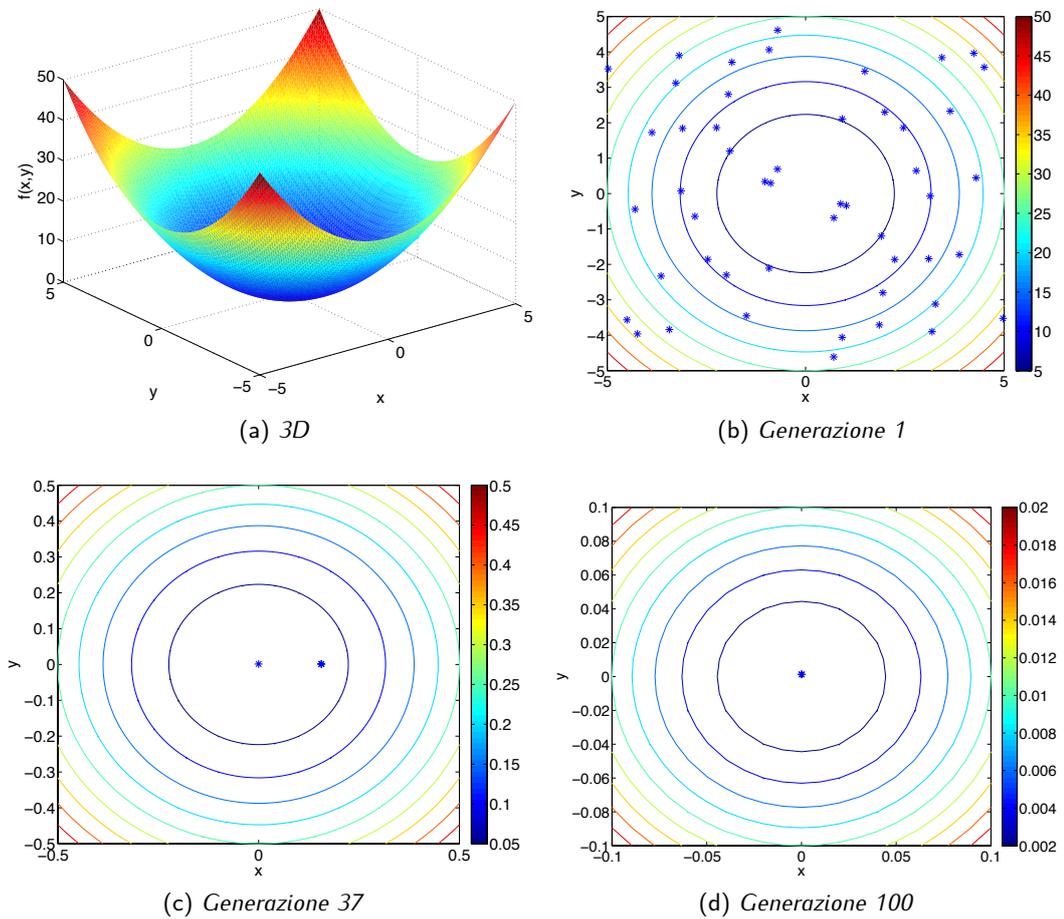
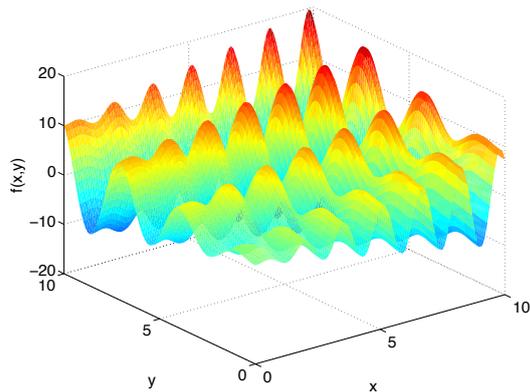


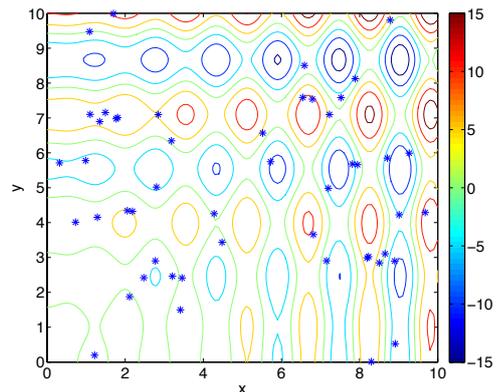
Figura 4.7: $f(x, y) = x^2 + y^2$, senza l'imposizione di vincoli.

Tabella 4.1: Confronto soluzioni.

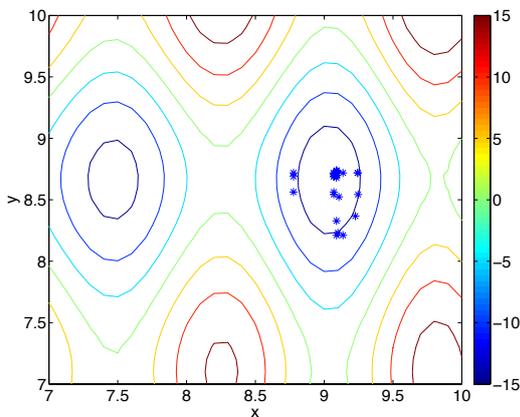
	x	y	$\min(f(x, y))$
Soluzione esatta	0	0	0
Codice genetico	$3.82e - 05$	$1.22e - 03$	$1.5e - 06$



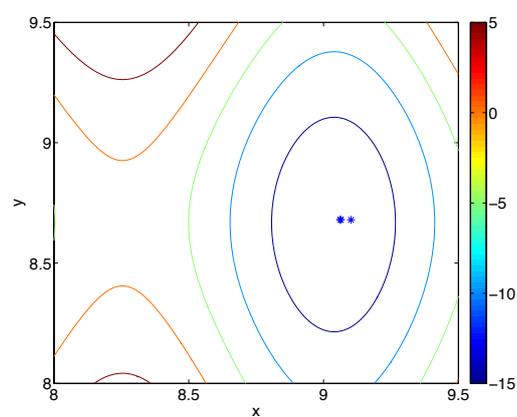
(a) 3D



(b) Generazione 1



(c) Generazione 8



(d) Generazione 100

Figura 4.8: $f(x, y) = x \cdot \sin(4x) + 1.1 \cdot y \cdot \sin(2y)$, senza l'imposizione di vincoli.

Tabella 4.2: Confronto soluzioni.

	x	y	$\min(f(x, y))$
Soluzione esatta	8.7000	9.0000	-18.5547
Codice genetico	8.6666	9.0429	-18.5909

4.5.2 Ottimizzazione vincolata

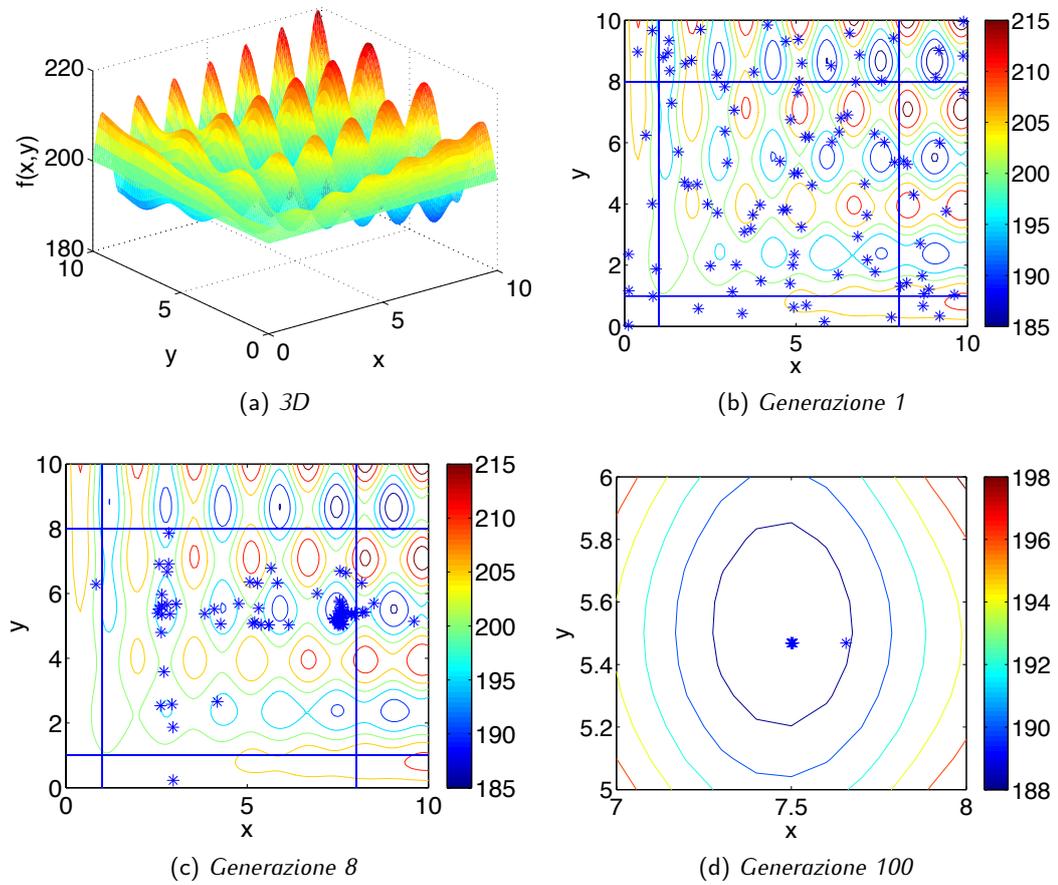


Figura 4.9: $f(x, y) = x \cdot \sin(4x) + 1.1 \cdot y \cdot \sin(2y) + 200$, con l'imposizione di vincoli.

Tabella 4.3: Confronto soluzioni.

	x	y	$\min(f(x, y))$
Soluzione esatta	7.5000	5.5000	186.3159
Codice genetico	7.5000	5.4686	186.3610

4.6 Una semplice applicazione

Per meglio comprendere le reali potenzialità di questo strumento verrà qui esposto un semplice problema, una struttura per la quale si ricerca la migliore inclinazione in modo da ridurre, alla base dell'antenna, il valore di M .

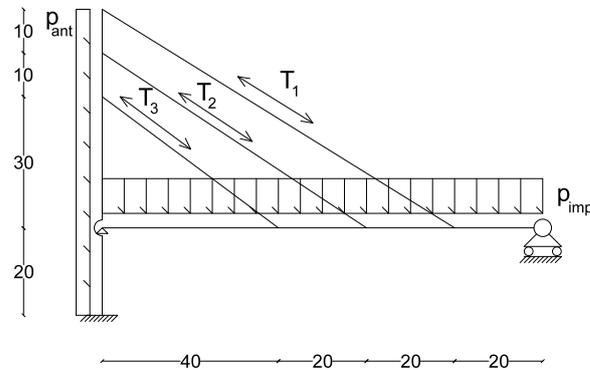


Figura 4.10: La struttura.

Sulla struttura agisce un peso distribuito sull'impalcato e il peso proprio dell'antenna.

	A m^2	I m^4	E Pa
Impalcato	0.6	0.05	$3.0e + 10$
Antenna	3.1415	0.7853	$3.0e + 10$
Strallo	$7.07e - 04$	-	$1.64e + 11$

Determinando il tiro negli stralli in modo da bloccare i punti di attacco all'impalcato si ottengono i seguenti valori di pretensione, la seguente deformata e sollecitazioni flessionali.

$$T_1 = 46653kN$$

$$T_2 = 43612kN$$

$$T_3 = 46788kN$$

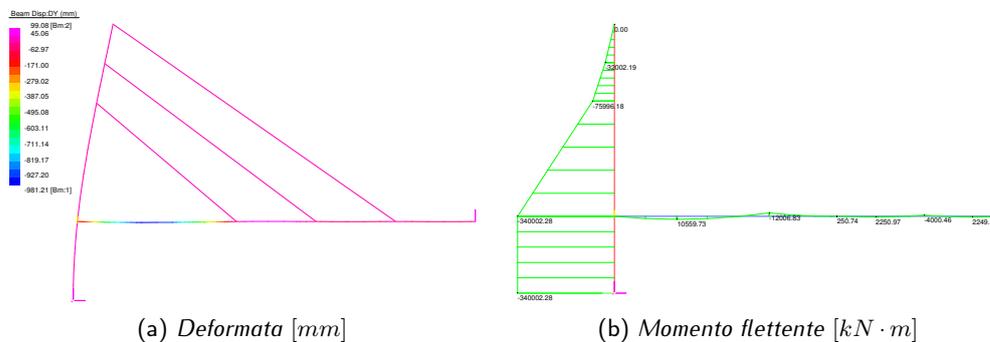
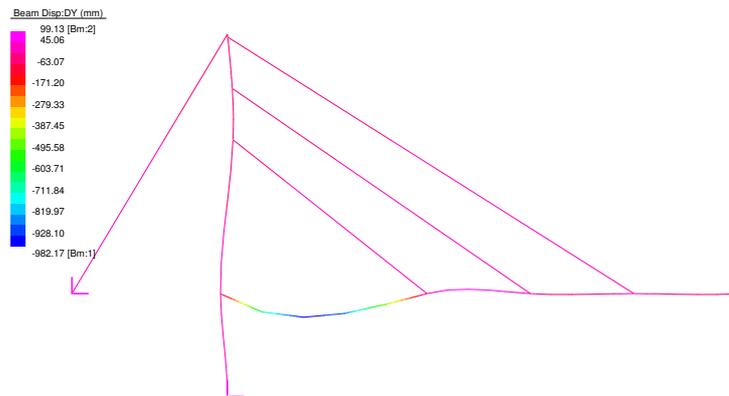


Figura 4.11: Risoluzione struttura in esame.

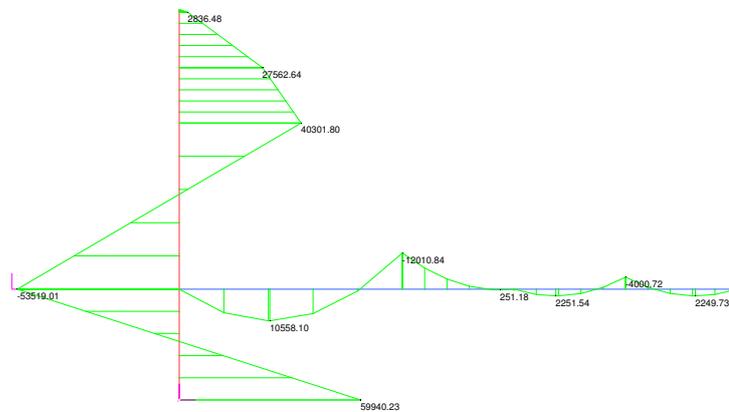
Per ridurre il momento alla base dell'antenna si può pensare di aggiungere uno strallo di riva che, ritenendo la sommità della stessa, riduce la sollecitazione complessiva.

In modo analogo a quanto fatto sopra, si sono determinati i tiri degli stralli in modo da bloccare i punti di aggancio. Il tiro da assegnare alla riva è quello in grado di bloccare orizzontalmente l'antenna. La deformata e la sollecitazione flessionale che si ottengono in questo caso sono le seguenti.

$$T_1 = 4016kN \quad T_2 = 1919kN \quad T_3 = 6192kN \quad T_{riva} = 11133kN$$



(a) Deformata



(b) Momento flettente

Figura 4.12: Soluzione nel caso di aggiunta dello strallo di riva.

In alternativa si può pensare di inclinare l'antenna in modo che il peso della stessa controbilanci il tiro dovuto agli stralli. Questo problema può essere risolto mediante una ricerca da eseguire con il codice genetico.

Detto α l'angolo di inclinazione dell'antenna rispetto all'orizzontale, si cerca quel valore tale per cui il rapporto M/N è minimo. In questo modo si riduce la sollecitazione alla base dell'antenna.

L'angolo α è stato fatto variare tra i 40° e i 90° . Non sono state inserite condizioni di vincolo in quanto non necessarie.

In figura 4.13 vi è rappresentata la prima popolazione di una delle varie analisi effettuate.

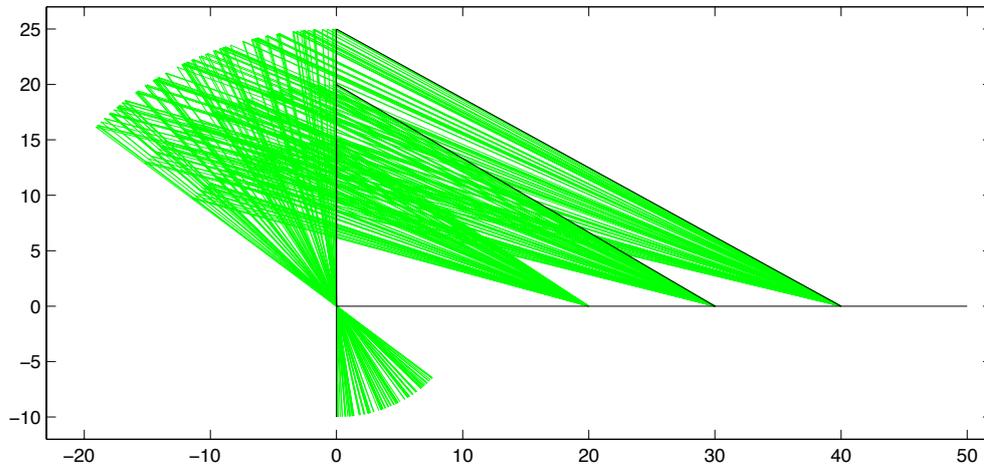


Figura 4.13: Il dominio della prima popolazione.

Alla fine dell'analisi, dopo le selezioni, le riproduzioni e le mutazioni, si raggiunge la convergenza della soluzione, rappresentata dalla spessa riga rossa, fig. 4.14.

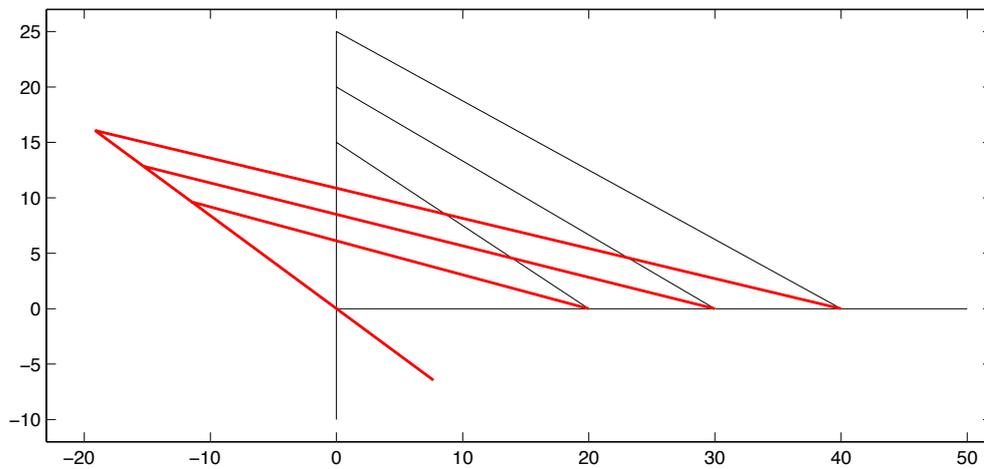


Figura 4.14: La soluzione del problema.

In figura 4.15 si possono notare altre configurazioni. È stato inserito questo grafico per far comprendere i passaggi che intervengono durante le selezioni e riproduzioni. Tutta l'analisi ha richiesto 23 cicli di iterazione, di cui gli ultimi 13 per definire i decimali dell'angolo.

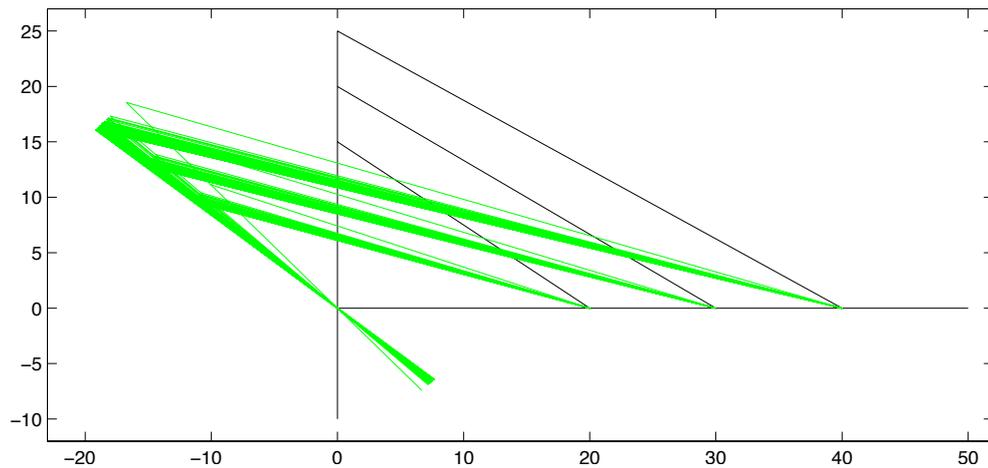


Figura 4.15: La soluzione al nono ciclo di iterazione.

Il valore di α individuato dal codice genetico è pari a 55.210° , cui corrispondono la seguente deformata e sollecitazione flettente, fig. 4.16.

$$T_1 = 13308kN \quad T_2 = 9750kN \quad T_3 = 14805kN$$

Come si può notare, alla base dell'antenna, il momento si riduce enormemente rispetto ai casi precedenti.

Lo studio di questa struttura era a scopo puramente didattico. Esso, infatti, aveva l'obiettivo di mostrare come sia possibile risolvere un problema tipico di ingegneria civile facendo ricorso ad algoritmi di intelligenza artificiale.

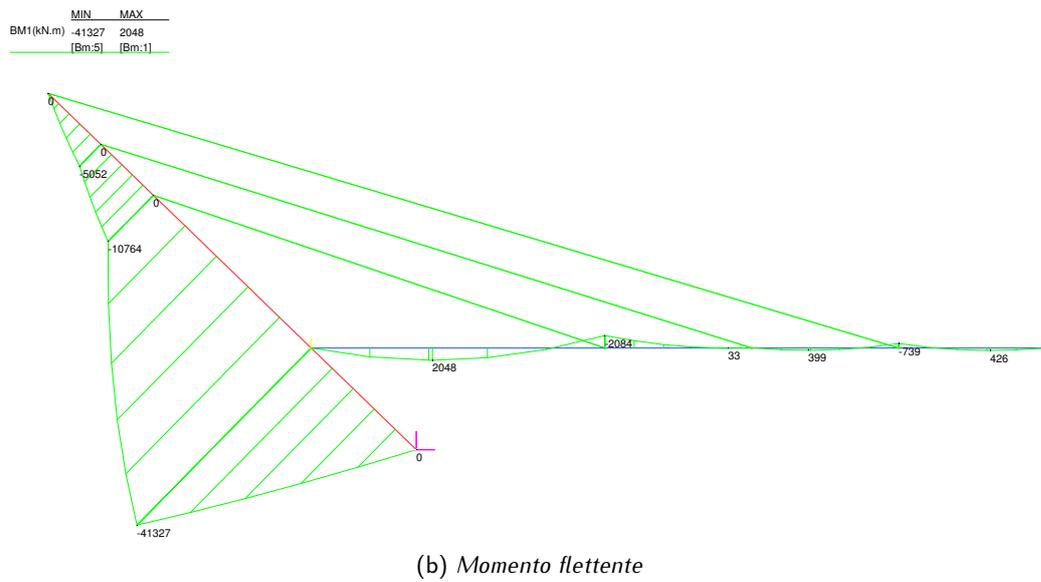
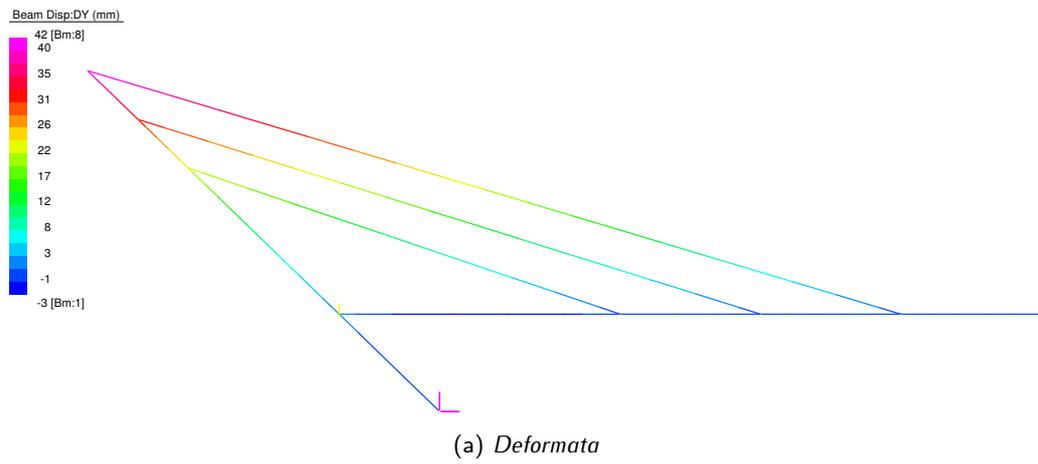


Figura 4.16: Soluzione ottimale mediante codice genetico.

Capitolo 5

Problemi connessi alla valutazione dei tiri

Si analizzerà qui un problema tipico dei ponti strallati.

In un ponte strallato i cavi possono essere suddivisi in due categorie, gli stralli di riva e tutti gli altri. Questa differenziazione nasce dal tipo di funzione che essi devono assolvere.

Abbiamo visto all'interno del capitolo 3 come gli stralli vengano dimensionati in modo tale da impedire determinati spostamenti. Gli stralli di riva, in particolare, hanno il compito di impedire gli spostamenti in sommità delle antenne.

Il predimensionamento dei tiri effettuato in questo modo porta alla messa in trazione dei vincoli a terra degli stralli di riva e alla possibilità di cadere in lasco del cavo stesso, in presenza di carichi sbilanciati.

Data la natura di questi problemi, nei prossimi paragrafi verranno analizzati altri metodi per il predimensionamento dei tiri per cercarne una possibile soluzione.



Figura 5.1: Ponte dello svincolo di Certosa, Milano.

5.1 I vincoli a terra

Prima di analizzare i problemi evidenziati nell'introduzione del capitolo, verrà eseguita una panoramica dei vincoli che possono essere utilizzati per un ponte.

In base al tipo di ancoraggio a terra dello strallo di riva è possibile avere una struttura autoancorata o una struttura con vincoli fissi. Le due si differenziano sostanzialmente per il mezzo atto ad assorbire la componente orizzontale del tiro dello strallo. Nel primo caso questa forza viene assorbita dall'impalcato, nel secondo caso viene totalmente scaricata a terra, [11].

A queste due condizioni di vincoli corrispondono due differenti distribuzioni di sforzi assiali.

Nel caso di autoancoraggio si hanno sforzi maggiori che possono comportare fenomeni

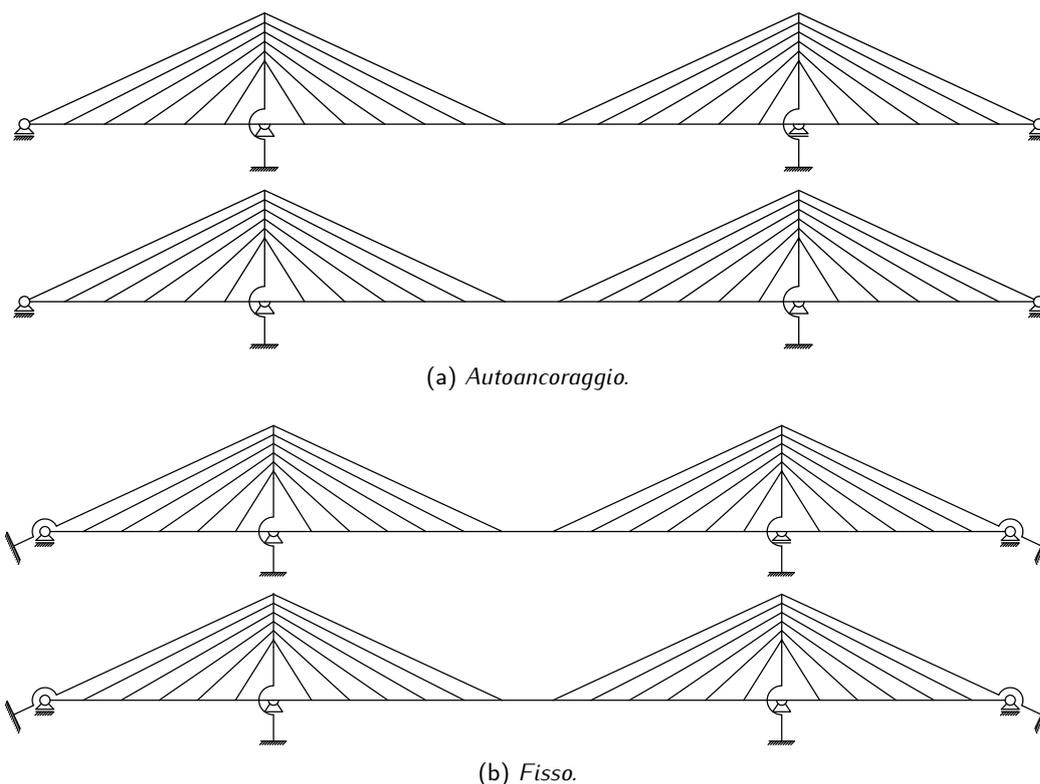


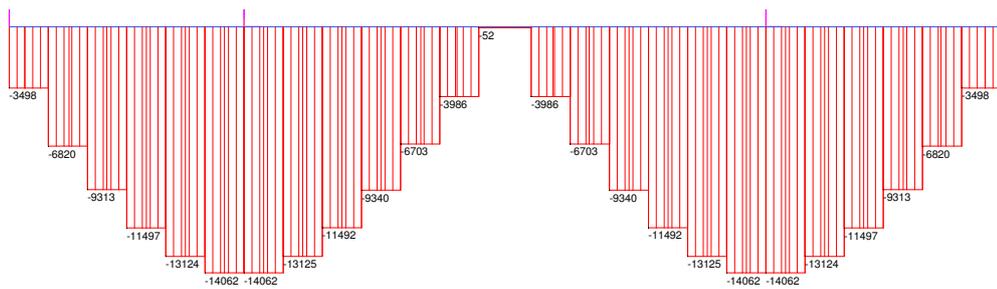
Figura 5.2: Condizioni di vincolo.

di instabilità, mentre nel secondo caso si ha uno sviluppo di trazioni in mezzeria, che nel caso di impalcati in calcestruzzo possono causare problemi, si veda 5.3.

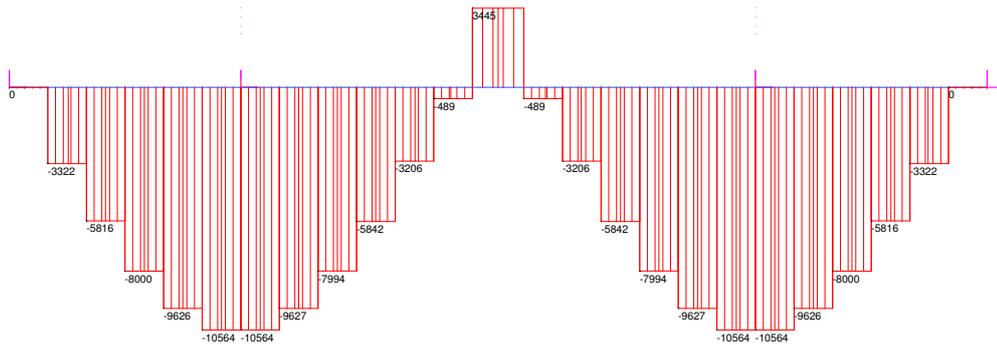
La scelta di una o dell'altra soluzione dipenderà dalle caratteristiche del terreno, spesso infatti scaricare tutta la tensione dello strallo di riva a terra può comportare costi superiori rispetto ad un progetto di un impalcato più robusto in grado di assorbire la componente orizzontale.

Per ognuna delle soluzioni vincolari individuate in 5.2 sono state inserite due differenti configurazioni. La differenza risiede nei collegamenti che intercorrono tra antenna e impalcato; il primo ha l'attacco di destra di tipo cerniera mentre a sinistra lo scorrimento orizzontale è libero, nel secondo caso entrambi i vincoli impediscono spostamenti in tutte e due le direzioni.

Non verrà preso qui in considerazione il caso con entrambe le cerniere in quanto impedisce lo scorrimento necessario per compensare gli effetti termici.



(a) Autoancoraggio.



(b) Vincoli fissi.

Figura 5.3: Distribuzione degli sforzi assiali [kN].

5.2 Il ponte preso in esame

Tutte le analisi del presente capitolo verranno effettuate sul seguente ponte, oggetto già di altri studi, [7] e [28].

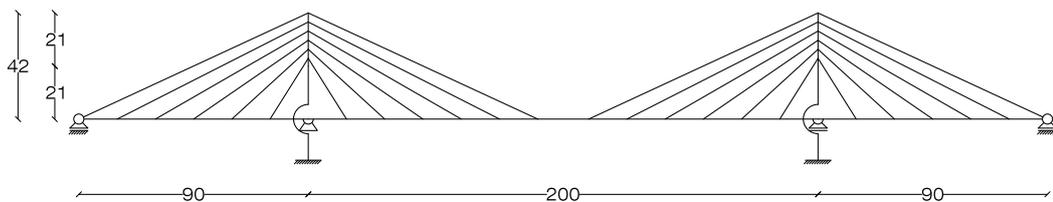


Figura 5.4: Connettività del ponte.

Esso è di tipo semifan, autoancorato e avente un appoggio scorrevole come collegamento tra impalcato e antenna destra. In figura 5.5 vi sono rappresentate le sezioni caratteristiche del ponte.

Durante tutte le analisi non verrà considerata la parte di antenna al di sotto dell'impalcato per non rimanere vincolati ad altezze che dipendono dall'altimetria del sito.

Preso in considerazione la numerazione degli stralli di figure 5.6, gli stralli 1, 2, 11, 12 e i loro rispettivi simmetrici hanno un'area pari a $0.01m^2$, tutti gli altri di $0.005m^2$.

Il peso proprio, attribuito come carico uniformemente distribuito, è pari a $g = 100kN/m$, mentre il carico accidentale è $q = 36kN/m$.

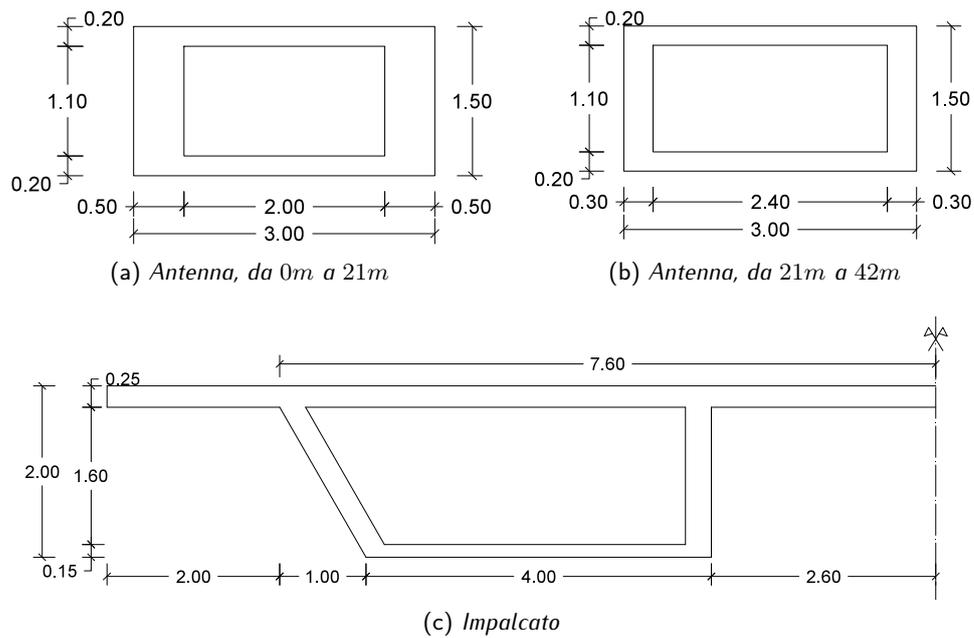


Figura 5.5: Sezioni di calcestruzzo.

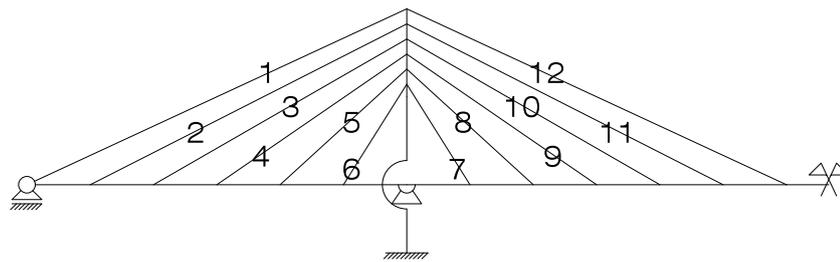


Figura 5.6: Numerazione stralli di metà ponte.

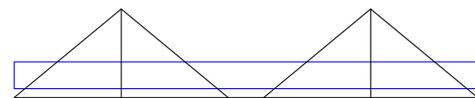
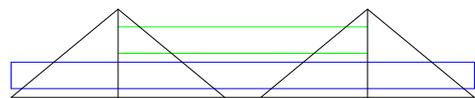
(a) *Peso proprio*(b) *Peso proprio e carico di servizio agente sulla campata centrale*(c) *Peso proprio e carico di servizio agente sulle campate laterali*

Figura 5.7: Le combinazioni di carico.

5.3 La determinazione dei tiri

Il predimensionamento degli stralli viene effettuato in modo tale da ottenere che sotto azione del peso proprio gli spostamenti agli attacchi dei cavi stessi siano nulli, come visto all'interno del capitolo 3.

I tiri ottenuti applicando questo metodo sono i seguenti:

$T_1 = 3991kN$	$T_2 = 3898kN$	$T_3 = 2985kN$	$T_4 = 2784kN$
$T_5 = 2370kN$	$T_6 = 1981kN$	$T_7 = 1938kN$	$T_8 = 2336kN$
$T_9 = 2711kN$	$T_{10} = 3127kN$	$T_{11} = 3193kN$	$T_{12} = 4473kN$
$T_{13} = 4353kN$	$T_{14} = 3055kN$	$T_{15} = 3045kN$ <td $T_{16} = 2612kN$	
$T_{17} = 2217kN$	$T_{18} = 1815kN$	$T_{19} = 2104kN$	$T_{20} = 2488kN$
$T_{21} = 2883kN$	$T_{22} = 3067kN$	$T_{23} = 4037kN$	$T_{24} = 4111kN$

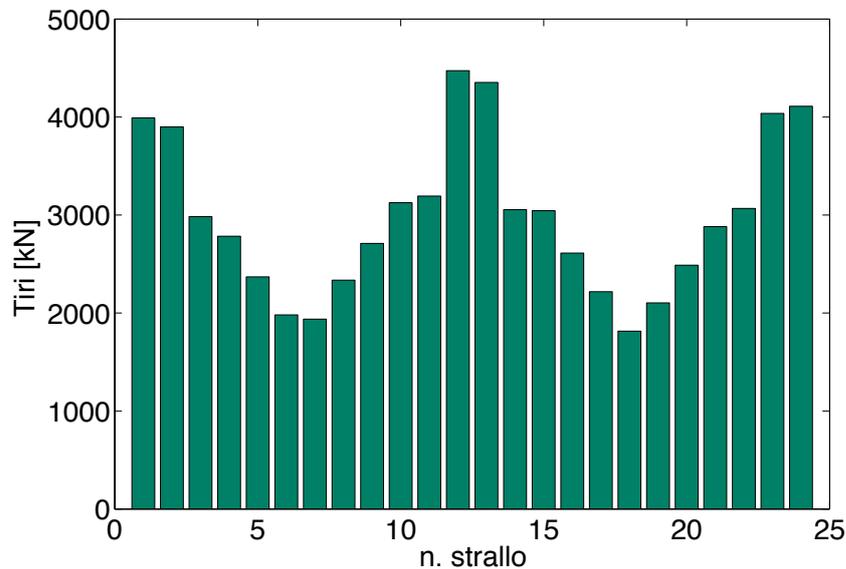


Figura 5.8: Istogramma dei tiri.

Nelle seguenti figure vi sono rappresentate la deformata che si ottiene applicando i tiri e il peso proprio e le reazioni vincolari ottenute per le diverse combinazioni di carico di figura 5.7.

Come si può notare, per tutte e tre le condizioni si ha una situazione in cui c'è una reazione negativa, cioè il ponte tende a sollevarsi. Nei prossimi paragrafi verranno effettuate delle analisi aventi l'obiettivo di eliminare le reazioni di trazione al vincolo e non permettere allo strallo di riva di finire in lasco nel caso di carico sbilanciato sulle campate laterali.

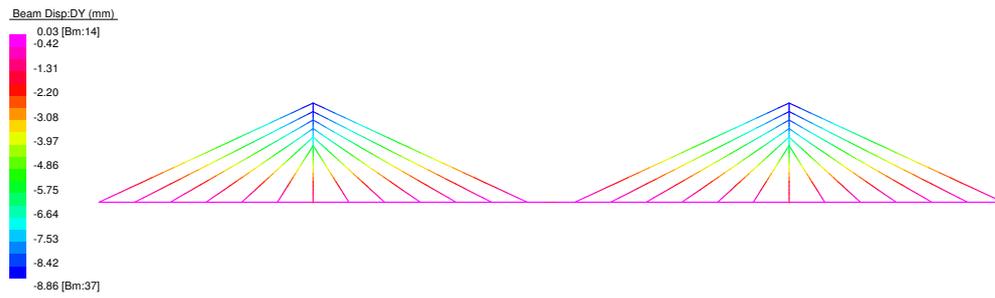


Figura 5.9: La deformata.

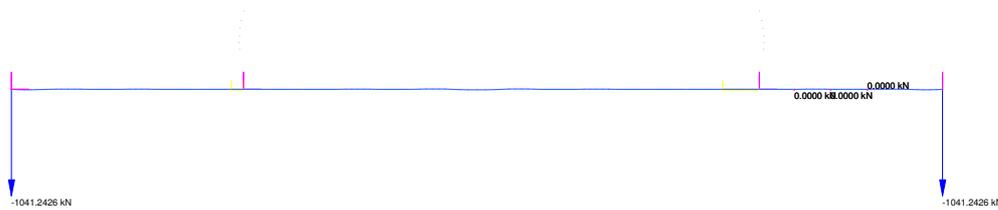


Figura 5.10: Combinazione: $\sum T_i + g_k$.

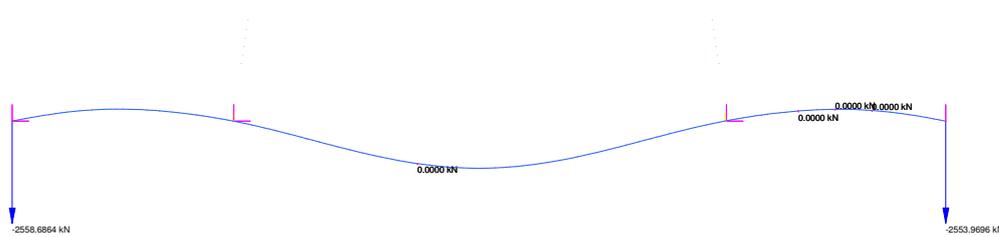


Figura 5.11: Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulla sola campata centrale.

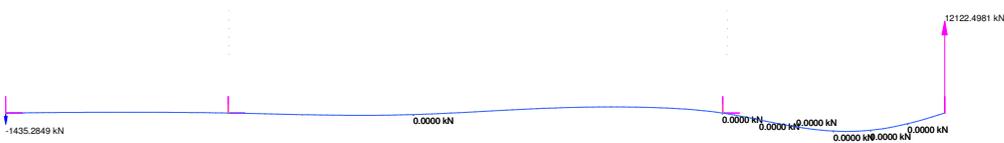


Figura 5.12: Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulle campate centrale e destra.

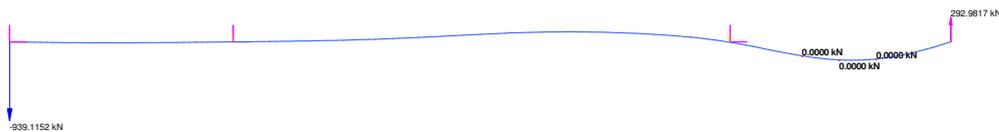


Figura 5.13: Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulla sola campata destra.

5.4 I minimi quadrati

Come è stato fatto notare, il calcolo dei tiri con il metodo delle flessibilità porta alla nascita di trazioni agli appoggi a terra. Ecco che nasce allora la necessità di cercare di impostare una soluzione in modo tale che si possano porre gli spostamenti nulli e che le reazioni vincolari, in presenza di carico sbilanciato sulla campata centrale, si azzerino o diventino di compressione.

Questo comporta che alla solita matrice di flessibilità M vengano aggiunte due equazioni in grado di controllare le reazioni.

$$M \longrightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} s^1_1 & s^2_1 & s^3_1 & s^4_1 & s^5_1 & s^6_1 \\ s^1_2 & s^2_2 & s^3_2 & s^4_2 & s^5_2 & s^6_2 \\ s^1_3 & s^2_3 & s^3_3 & s^4_3 & s^5_3 & s^6_3 \\ s^1_4 & s^2_4 & s^3_4 & s^4_4 & s^5_4 & s^6_4 \\ s^1_5 & s^2_5 & s^3_5 & s^4_5 & s^5_5 & s^6_5 \\ s^1_6 & s^2_6 & s^3_6 & s^4_6 & s^5_6 & s^6_6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} s^1_1 & s^2_1 & s^3_1 & s^4_1 & s^5_1 & s^6_1 \\ s^1_2 & s^2_2 & s^3_2 & s^4_2 & s^5_2 & s^6_2 \\ s^1_3 & s^2_3 & s^3_3 & s^4_3 & s^5_3 & s^6_3 \\ s^1_4 & s^2_4 & s^3_4 & s^4_4 & s^5_4 & s^6_4 \\ s^1_5 & s^2_5 & s^3_5 & s^4_5 & s^5_5 & s^6_5 \\ s^1_6 & s^2_6 & s^3_6 & s^4_6 & s^5_6 & s^6_6 \\ R^1_A & R^2_A & R^3_A & R^4_A & R^5_A & R^6_A \\ R^1_B & R^2_B & R^3_B & R^4_B & R^5_B & R^6_B \end{bmatrix}$$

Il problema diventa ipervincolato e, se non sono presenti particolari deficienze di rango della matrice A , non ammette nessuna soluzione.

Una soluzione debole può essere ottenuta mediante l'utilizzo dei minimi quadrati.

Il problema che bisogna risolvere è il seguente:

$$T = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$

dove A è una matrice $26 \cdot 24$ e b è un vettore di 26 elementi, i primi 24 riguardano i termini di spostamento, mentre gli ultimi 2 derivano dalle equazioni di sovrapposizione delle reazioni vincolari.

Risolvendo mediante minimi quadrati viene determinata quella combinazione di tiri che riduce al minimo la differenza tra la situazione ideale desiderata e la soluzione stessa. Come si nota dalla figura 5.14 non ci sono spostamenti nulli e le reazioni non sono esattamente pari a quella per cui era stata progettata.

La determinazione dei tiri effettuata in questo modo porta ad avere reazioni positive, in grado di annullare la trazione nel caso di carico sbilanciato, gli spostamenti nel complesso sono accettabili ma alcuni cavi sono compressi.

Un problema con un tale esito, matematicamente risolto ma fisicamente privo di significato, evidenzia semplicemente il fatto che alcune condizioni, in questo caso quelle associate alle reazioni di appoggio, non possono essere poste ad arbitrio.

5.5 Il sistema $n \cdot n$

Visto che la soluzione matematica esatta porta a risultati non soddisfacenti, si è cercato di trovare una soluzione rinunciando a delle condizioni, in questo modo si ottengono nuovamente sistemi di n equazioni in n incognite.

Lo scopo di queste analisi è annullare la reazione ai vincoli, perciò sicuramente la scelta non ricadrà su queste equazioni. È possibile scegliere se eliminare le

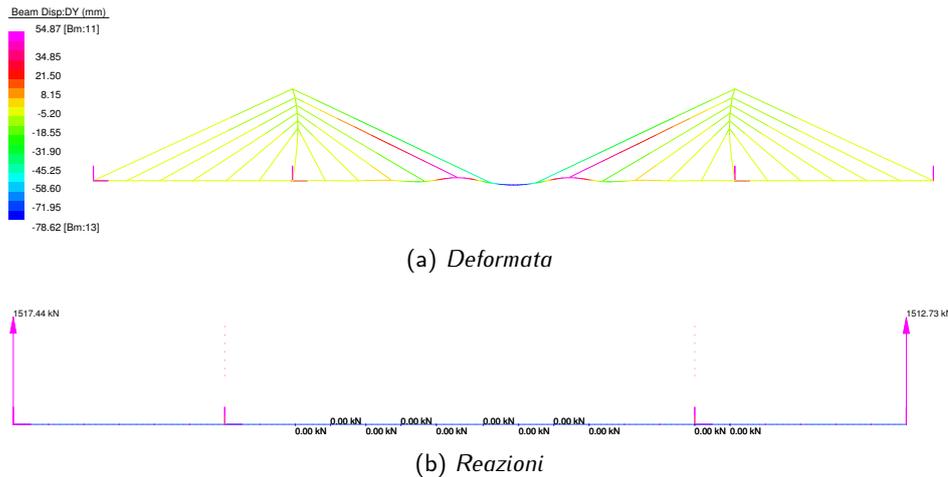


Figura 5.14: Soluzione mediante minimi quadrati.

equazioni che impongono l'annullarsi degli spostamenti in sommità alle antenne o due spostamenti verticali.

Per una corretta viabilità viene logico pensare di eliminare il vincolo sugli spostamenti orizzontali dell'antenna e introdurre al posto di queste due equazioni quelle che regolano le reazioni vincolari.

I risultati che si ottengono in questa situazione sono i seguenti

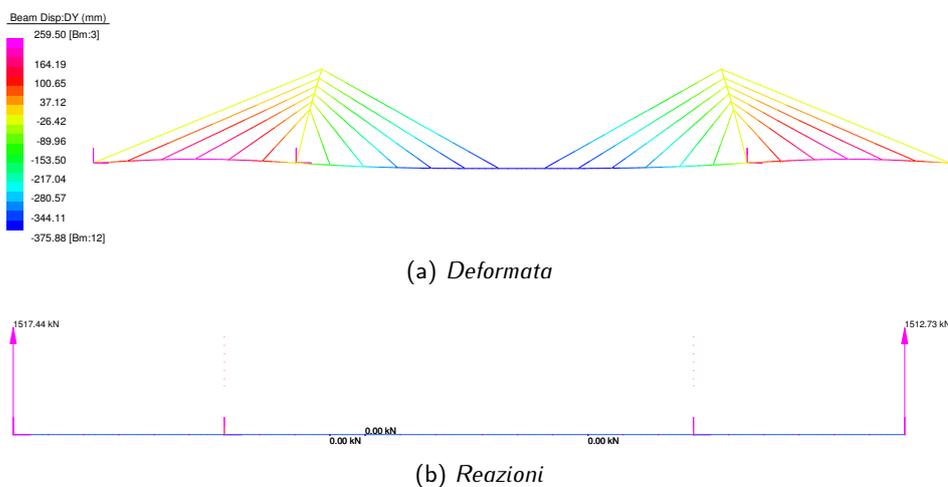


Figura 5.15: Soluzione ottenuta rinunciando al vincolo dell'antenna.

come per il caso dei minimi quadrati anche in questo caso si ottengono dei cavi compressi, situazione non accettabile.

Purtroppo anche sostituendo due spostamenti verticali con le equazioni delle reazioni ciò che si ottiene è una situazione con stralli tesi e compressi, inoltre si ottengono spostamenti piuttosto rilevanti già solo per il peso proprio. Non viene inserito il grafico delle deformazione in quanto, amplificato per lo stesso fattore delle precedenti, risulta assurdo.

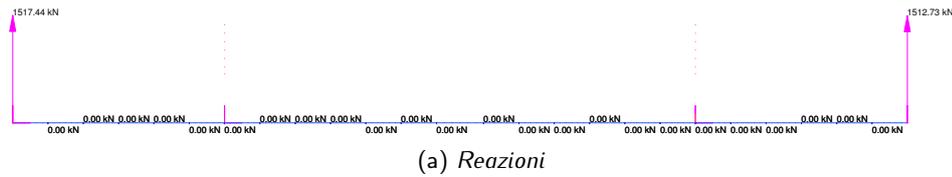


Figura 5.16: Soluzione ottenuta eliminando il secondo e il penultimo strallo.

Ricapitolando quanto visto finora, i ponti strallati progettati con i tradizionali metodi portano ad avere trazione ai vincoli a terra.

Sono stati adottati diversi metodi per cercare di risolvere il problema, i risultati sono racchiusi nella seguente tabella.

	Spostamenti	Reazione	Tiri
Min. Quadrati	OK	OK	NO
No Sp. Oriz.	OK	OK	NO
No Sp. Ver.	NO	OK	NO

Le condizioni sono rispettate se:

- spostamenti: le frecce verticali risultano minori di $L/300$, con L distanza tra due stralli successivi;
- reazione : i valori di reazione sono paragonabili a quelli dovuti al carico di servizio ;
- tiri : tutti gli stralli risultano tesi.

Nessuna delle analisi affrontate soddisfa le condizioni di ingresso richieste, viene naturale giungere alla conclusione che per non avere problemi di trazione nei vincoli a terra si devono usare vincoli bilateri o in alternativa eliminare gli stralli di riva.

Eliminare gli stralli di riva, infatti, fa sì che, con l'ordinario metodo di dimensionamento, gli appoggi non vadano in trazione e gli spostamenti siano comunque infinitesimi. Ovviamente si ottiene un'antenna particolarmente inflessa (si confrontino la figura 5.17 con la 5.9).

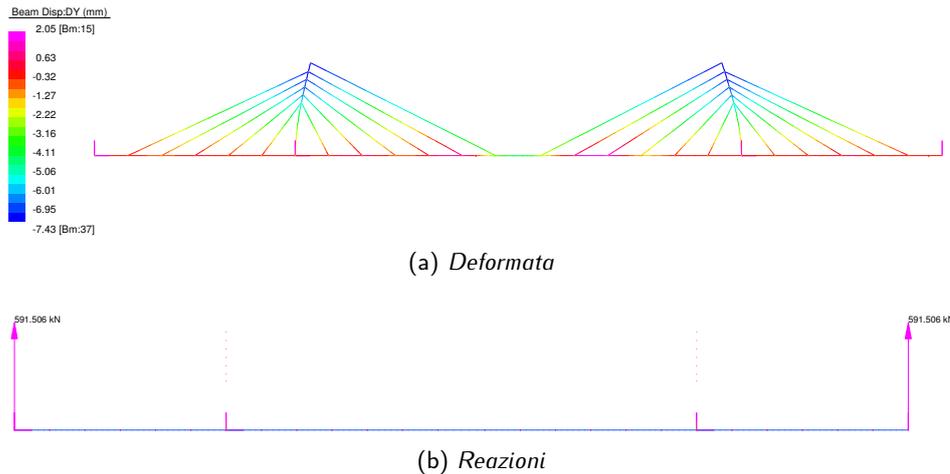


Figura 5.17: Soluzione ottenuta eliminando gli stralli di riva.

5.6 La scelta dell'indicatore di riferimento.

Come visto all'interno del capitolo 4, per selezionare gli individui che meglio si adattano all'ambiente occorre una funzione fitness in grado di valutarne il livello di adeguatezza. Per il problema in esame è stata utilizzata l'energia potenziale elastica, in seguito indicata con EPE .

L'energia potenziale elastica può essere considerata come l'indice del corretto utilizzo del materiale, la soluzione avente questo parametro minore è la migliore auspicabile.

I contributi che concorrono alla definizione di EPE sono:

- energia assiale $EPE_A = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{E \cdot A} dx$
- energia tagliante $EPE_T = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{G \cdot A_t} dx$
- energia flessionale $EPE_M = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E \cdot J} dx$

Il contributo dell'energia tagliante solitamente si trascura in quanto irrisorio rispetto alle altre due componenti.

Oltre ad essere rappresentativa del sistema, l' EPE è anche strettamente correlata all'usuale metodo di predimensionamento degli stralli. Porre uguale a 0 lo spostamento durante le analisi coincide infatti con la ricerca del minimo del potenziale stesso. Per comprendere questa affermazione verranno qui fatti due semplici esempi che possono poi essere generalizzati al caso di n stralli.

Si consideri la struttura a lato, l' EPE , trascurando i contributi taglianti, è determinabile come

$$\frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ}$$

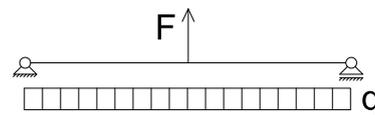
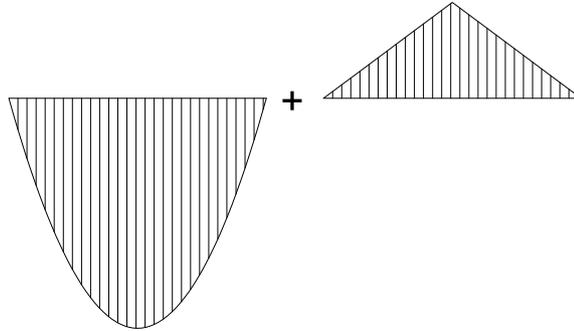


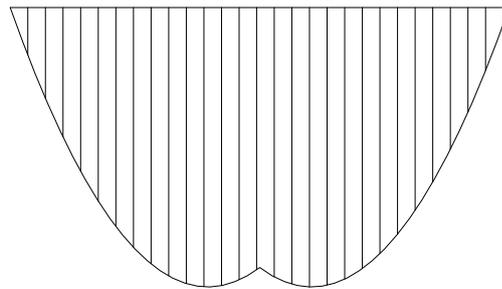
Figura 5.18: Struttura di riferimento.

dove M è il momento della struttura, descritto dalla seguente equazione e avente il seguente andamento.

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad M(x) = (q \cdot l - F) \cdot \frac{x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2}$$



(a) Andamento momenti flettenti delle due condizioni di carico.



(b) Andamento del momento flettente risultante.

Figura 5.19: Andamento del momento flettente.

Come si può notare dal diagramma è presente una discontinuità, per questo motivo sarebbe necessario dividere in due domini l'integrazione. In realtà la struttura è simmetrica ed è possibile integrare su un solo dominio e poi raddoppiare il valore ottenuto.

Sostituendo l'espressione del momento all'interno dell'integrale dell'EPE si ottiene

$$EPE = \frac{2}{2EJ} \int_0^{l/2} \left((q \cdot l - F) \cdot \frac{x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{96} F^3 l^3 - \frac{5}{384} F q l^4 + \frac{1}{240} q^2 l^5 \right)$$

Derivando rispetto a F si ottiene

$$\frac{dEPE}{dF} = \frac{F \cdot l^3}{3} - \frac{5}{24} q \cdot l^4 = 0$$

da cui $F = 5ql/8$. Allo stesso risultato si potrebbe arrivare studiando separatamente le seguenti due strutture.

Determinando lo spostamento in mezzeria per queste due strutture e ponendolo uguale a 0, procedimento coincidente alla determinazione del tiro in uno strallo, si

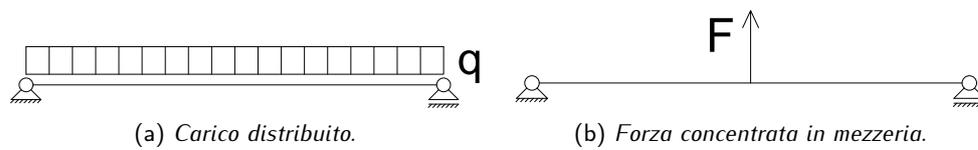


Figura 5.20: Strutture ausiliarie.

otterrebbe

$$\frac{1}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{EJ} - \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{EJ} = 0 \quad F = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

Progettare gli stralli annullando gli spostamenti o ricercando la forza da applicare agli stessi minimizzando l'energia potenziale porta allo stesso medesimo risultato.

Allo stesso risultato si può arrivare anche nel caso di strutture più complesse. Si faccia ora riferimento alla seguente struttura. In questo caso vi è la presenza di due

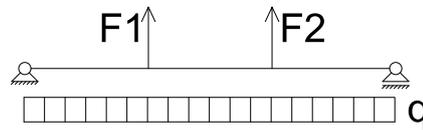


Figura 5.21: Struttura di riferimento.

forze concentrate, poste rispettivamente a $l/3$ dagli estremi della trave, che comportano due discontinuità nell'andamento del momento, perciò la necessità di tre diversi domini di integrazione.

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot F_2 \cdot x \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{3}$$

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot x + F_1 \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot F_2 \cdot x \quad \frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \cdot l$$

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot x + F_1 \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right) + \left(x - \frac{2}{3} \cdot l\right) \cdot F_2 \quad \frac{2}{3} \cdot l \leq x \leq l$$

Il diagramma dei momenti flettenti in questo caso è il seguente.

Integrando sui diversi domini l'EPE si ottiene

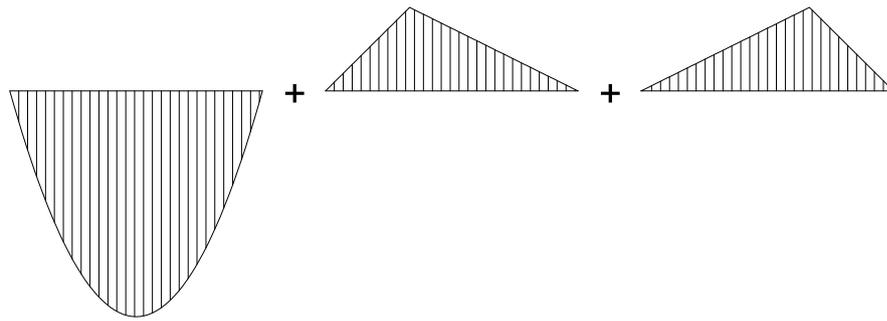
$$EPE = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} = \frac{l^3}{19440 \cdot EJ} \cdot (160 \cdot F_2^2 + 280 \cdot F_2 \cdot F_1 - 220 \cdot F_2 \cdot q \cdot l + 160 \cdot F_1^2 - 220 \cdot F_1 \cdot q \cdot l + 81 \cdot q^2 \cdot l^2)$$

Derivando rispetto a F_1 e F_2 si ottengono le seguenti due equazioni.

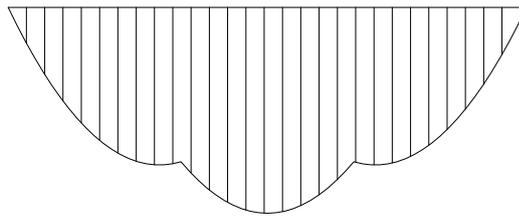
$$\frac{dEPE}{dF_1} = 14 \cdot F_2 + 16 \cdot F_1 - 11 \cdot q \cdot l \quad \frac{dEPE}{dF_2} = 16 \cdot F_2 + 14 \cdot F_1 - 11 \cdot q \cdot l$$

Mettendole a sistema si ottiene che $F_1 = F_2 = \frac{11}{30} ql$.

In modo duale al caso precedente, vengono qui cercati gli spostamenti nei punti in cui agiscono le forze per le seguenti tre configurazioni di carico.

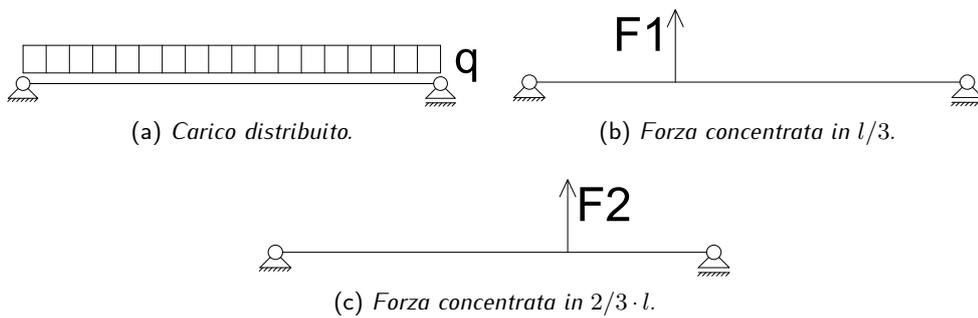


(a) Andamento dei momenti delle tre diverse condizioni di carico



(b) Andamento del momento flettente risultante

Figura 5.22: Andamento del momento flettente della struttura che si sta analizzando.

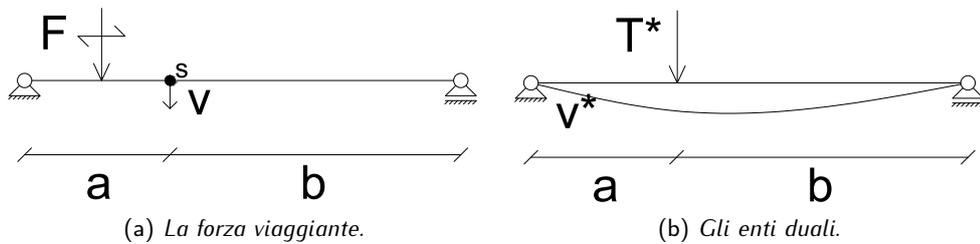


(a) Carico distribuito.

(b) Forza concentrata in $l/3$.(c) Forza concentrata in $2/3 \cdot l$.

Figura 5.23: Strutture ausiliarie.

Al posto di analizzare tre differenti strutture, è stata risolta un'unica linea di influenza con la quale si sono ottenuti tutti i dati ricercati. Si ricerca la linea di influenza dello spostamento v nel punto distante a dall'estremo sinistro, per un carico viaggiante F .



(a) La forza viaggiante.

(b) Gli enti duali.

Figura 5.24: La linea di influenza.

Per il teorema di Maxwell

$$F \cdot v^* = T^* \cdot v_s^F \longrightarrow v_s^F = F \cdot \frac{v^*}{T^*} \quad (5.1)$$

Per determinare v_s^F bisogna definire l'andamento di v^* . Per il teorema di Mohr, l'andamento di v coincide con il momento flettente di una struttura fittizia, caricata con la medesima azione interna, cambiata di segno, dovuta alla struttura sulla quale sono agenti gli enti duali.

Il diagramma del momento flettente per la struttura degli agenti duali è il seguente.

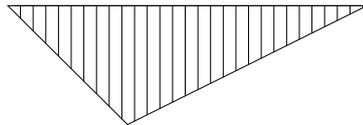


Figura 5.25: Momento flettente della struttura che si sta analizzando.

In cui il valore massimo è pari a $M_{max} = \frac{T^* \cdot a \cdot b}{l}$. Per il teorema di Mohr si risolve perciò la seguente struttura. In cui il valore massimo è $q_{max} = \frac{T^* \cdot a \cdot b}{l \cdot E \cdot J}$. Come

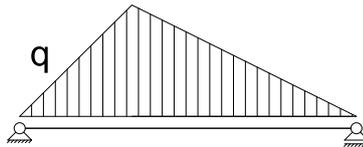


Figura 5.26: Struttura fittizia.

per i casi precedenti, siamo di fronte ad una struttura non simmetrica perciò anche in questo caso il momento flettente verrà diviso in due domini. Ricordandoci che l'azione interna coincide con v^* otteniamo

$$v^*(x) = T^* \cdot \left(\frac{a \cdot b(a^2 + 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2) \cdot x}{6 \cdot E \cdot J \cdot l^2} - \frac{b \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot J \cdot l} \right) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v^*(x) = \frac{T^* \cdot a}{6 \cdot E \cdot J \cdot l^2} (x^3 \cdot l - 3 \cdot (a + b) \cdot l \cdot x^2 + (a^2 \cdot (b + 3 \cdot l) + 3 \cdot a \cdot b \cdot (b + l) + 2 \cdot b^3) \cdot x - a^2 \cdot (a + b) \cdot l) \quad a \leq x \leq l$$

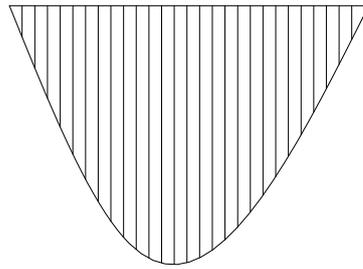
il cui grafico è

Definita l'ultima grandezza utile all'applicazione del teorema di Maxwell possiamo ricavare i dati necessari per il confronto.

$$a = \frac{l}{3} \quad b = \frac{2}{3} \cdot l \quad x = \frac{l}{3} \quad s_1^1 = \frac{4}{243} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot J} = s_2^2$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot l \quad b = \frac{l}{3} \quad x = \frac{l}{3} \quad s_2^1 = \frac{7}{486} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot J} = s_1^2$$

Poiché il carico distribuito può essere visto come una forza che spazza su tutta la trave va eseguito un integrale in x , in cui all'interno dell'espressione di v^* si è posto

Figura 5.27: Andamento di v^* .

$a = \frac{l}{3}$ e $b = \frac{2}{3} \cdot l$. Il risultato ottenuto, sommando i contributi dei due domini, è $s_1^0 = s_2^0 = \frac{11}{572} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}$.

Per ottenere il valore di F_1 e F_2 si deve risolvere il seguente sistema

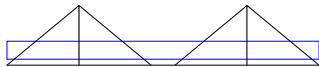
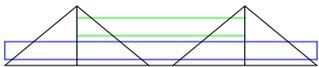
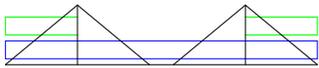
$$\begin{bmatrix} s_1^1 & s_1^2 \\ s_2^1 & s_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{243} & \frac{7}{486} \\ \frac{7}{486} & \frac{4}{243} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{11}{972} \cdot q \cdot l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Risolvendo il sistema si ottiene $F_1 = F_2 = -\frac{11}{30} \cdot q \cdot l$, il differente segno è dovuto al fatto che la struttura di riferimento iniziale aveva i carichi verso l'alto, mentre la forza viaggiante è verso il basso.

Anche in questo caso si ottengono gli stessi risultati ricavati precedentemente minimizzando l'energia potenziale elastica, questa porta a concludere che l'EPE è un ottimo indicatore di adattabilità dell'individuo.

Nella tabella seguente sono evidenziati i valori dell'EPE al variare di condizioni di carico e di componenti prese in considerazione, dove π_d è l'energia flessionale dell'impalcato, π_{cb} la componente assiale dei cavi e π_{tw} la componente flessionale dovuta all'antenna. Il predimensionamento dei tiri degli stralli è stato effettuato ponendo nulli gli spostamenti, per ottenere i valori minimi.

Tabella 5.1: L'EPE per varie combinazioni di carico.

	π_d $kN \cdot m$	$\pi_d + \pi_{cb}$ $kN \cdot m$	$\pi_d + \pi_{cb} + \pi_{tw}$ $kN \cdot m$
	1.1	5033.1	5033.3
	149.8	8260.9	8320.9
	97.3	5173.2	5193.6

I risultati visibili in tabella evidenziano che il valore di EPE dipende molto dalla condizione di carico che si sta analizzando.

Considerare l'energia potenziale dei cavi può generare problemi ai fini di valutarne il minimo. L'elevato valore di questa componente può infatti coprire gli effetti flessionali dell'impalcato e dell'antenna.

Anche in questi risultati viene evidenziato come la variazione di EPE è strettamente correlata al regime di spostamenti caratterizzanti la struttura. Infatti per la struttura soggetta al solo peso proprio, i valori di EPE sono molto minori rispetto agli altri casi, questo è dovuto al fatto che la struttura è stata progettata per non deformarsi sotto quelle azioni.

Al fine di mettere in luce questa stretta correlazione si è eseguita un'analisi utilizzando un algoritmo genetico privo di vincoli. Si è ricercata la combinazione di tiri in grado di minimizzare l'EPE flessionale di impalcato e antenna al fine di confrontarla con la configurazione che annulla tutti gli spostamenti.

La combinazione di tiri che si ottiene è la seguente

$T_1 = 4187.62kN$	$T_2 = 3805.14kN$	$T_3 = 2764.72kN$
$T_4 = 3106.12kN$	$T_5 = 1971.96kN$	$T_6 = 2148.81kN$
$T_7 = 2072.74kN$	$T_8 = 2244.18kN$	$T_9 = 2630.75kN$
$T_{10} = 2813.32kN$	$T_{11} = 3969.81kN$	$T_{12} = 4118.11kN$
$T_{13} = 4485.33kN$	$T_{14} = 2898.09kN$	$T_{15} = 3324.38kN$
$T_{16} = 2570.95kN$	$T_{17} = 1887.84kN$	$T_{18} = 3007.37kN$
$T_{19} = 2560.23kN$	$T_{20} = 1982.65kN$	$T_{21} = 2386.87kN$
$T_{22} = 4101.48kN$	$T_{23} = 3097.89kN$	$T_{24} = 3968.75kN$

a cui corrisponde un'energia potenziale elastica di tipo flessionale di $3.02kN \cdot m$. Nel grafico seguente, fig. 5.28, si può fare un confronto tra i tiri ottenuti dal codice genetico e quelli calcolati per ottenere gli spostamenti degli agganci degli stralli totalmente fermi.

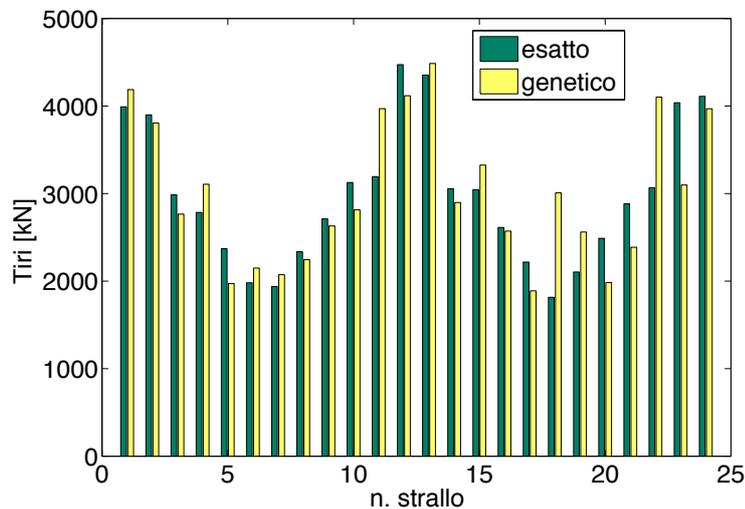


Figura 5.28: Istogramma di confronto.

Come si può notare, alcuni stralli raggiungono valori di tiri strettamente paragonabili tra loro, mentre per altri il valore può discostarsi sensibilmente.

L'andamento dell'energia, al proseguire dei cicli di analisi, è il seguente, nel grafico è evidenziata anche la curva di minimo.

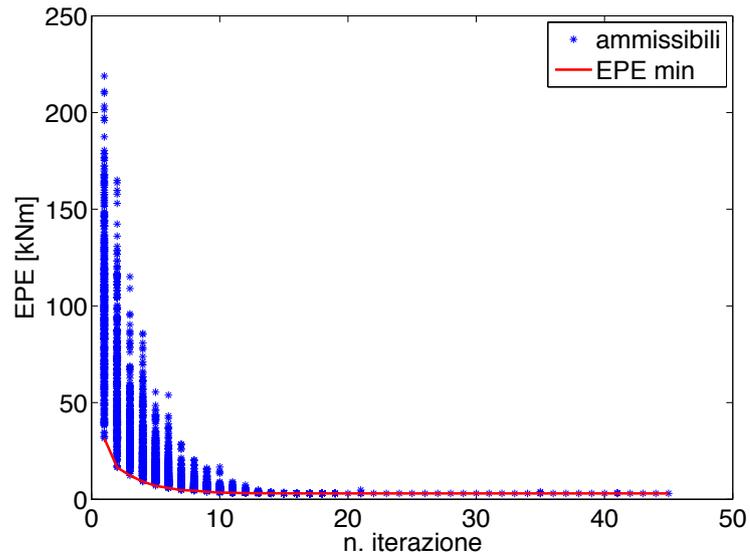
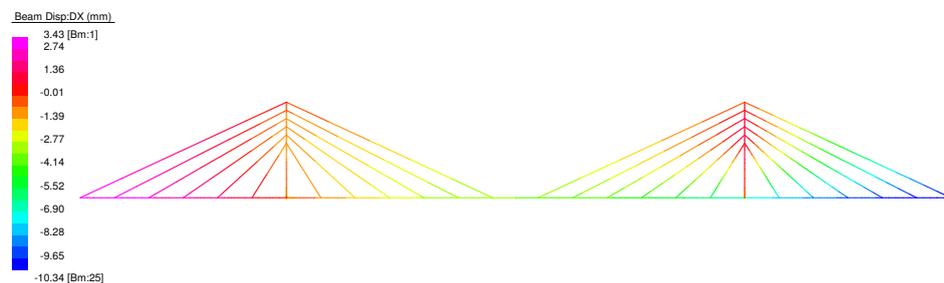


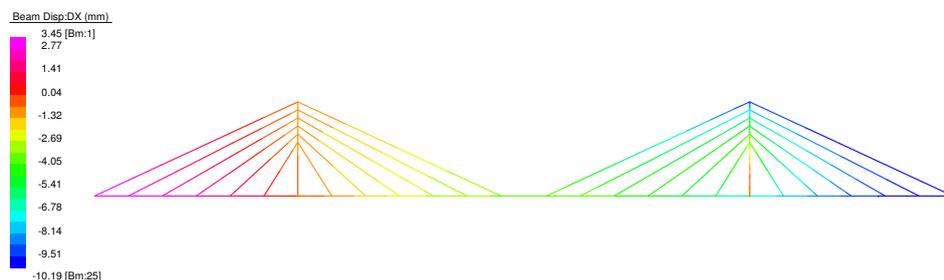
Figura 5.29: Andamento dell'energia potenziale al proseguire dei cicli.

La necessità di molteplici cicli nei dintorni del valore ricercato è dovuta al fatto che l'analisi termina solo nel caso in cui l'80% degli individui è identico. Per problemi aventi numerose variabili questo processo richiede più tempo.

Nelle seguenti figure vi sono i confronti di deformate e sollecitazioni per le due differenti configurazioni di tiro.

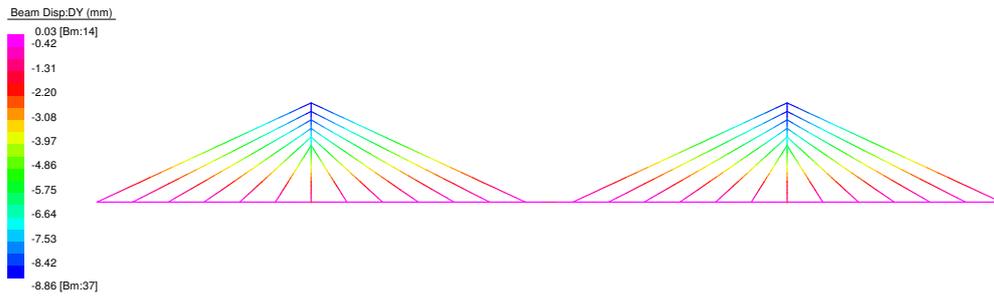


(a) *Esatta*

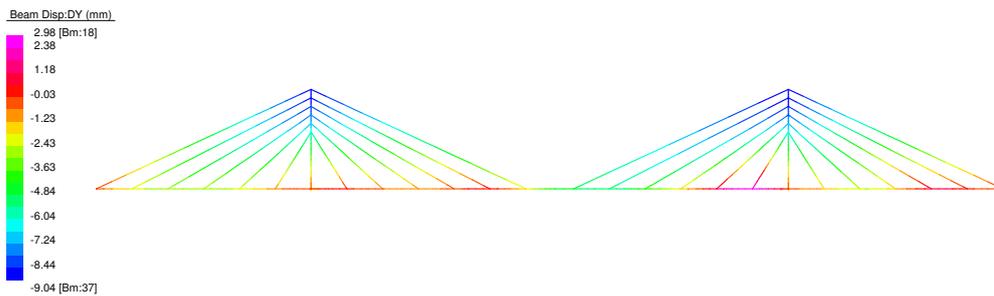


(b) *Soluzione del genetico*

Figura 5.30: Le deformate in direzione x .



(a) *Esatta*

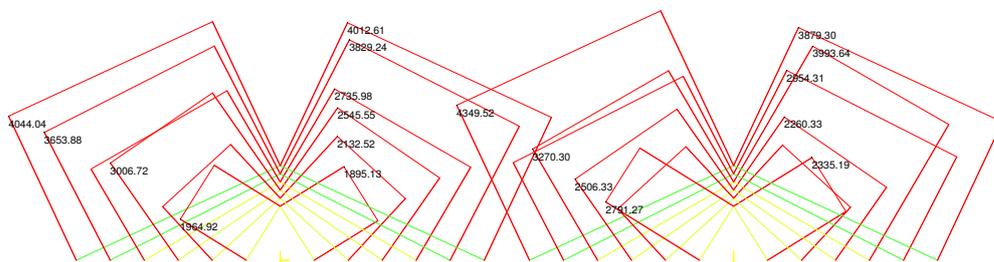


(b) *Soluzione del genetico*

Figura 5.31: Le deformate in direzione y .



(a) *Esatta*



(b) *Soluzione del genetico*

Figura 5.32: Andamento azioni assiali all'interno degli stralli, $[kN]$.

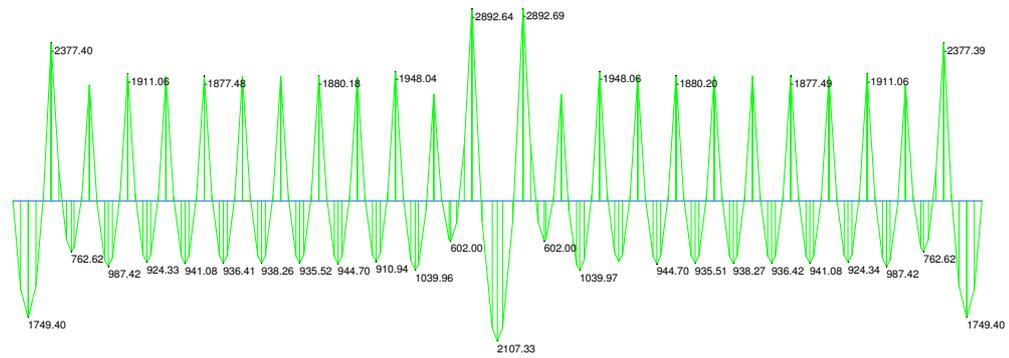


(a) Esatta



(b) Soluzione del genetico

Figura 5.33: Andamento azioni assiali all'interno dell'impalcato, $[kN]$.

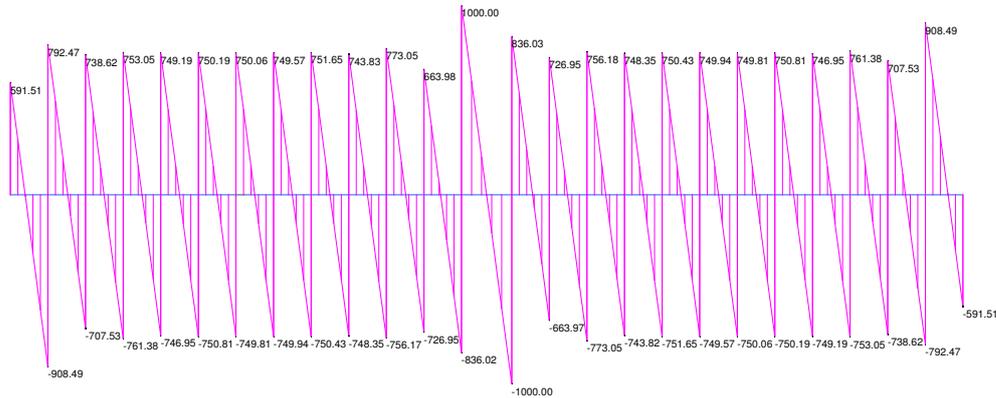
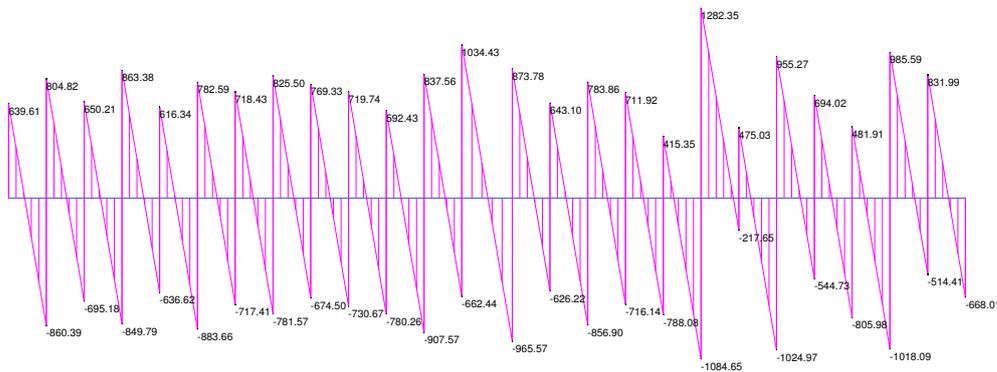


(a) Esatta



(b) Soluzione del genetico

Figura 5.34: Andamento momenti flettenti all'interno dell'impalcato, $[kN \cdot m]$.

(a) *Esatta*(b) *Soluzione del genetico*Figura 5.35: Andamento azioni di taglio all'interno dell'impalcato, [kN].

A seguito delle analisi fatte e dei risultati ottenuti si può osservare che:

- i valori dei tiri sono confrontabili con quelli determinati con il metodo delle flessibilità;
- gli spostamenti si discostano poco dal valore di riferimento che si voleva ottenere (spostamenti nulli);
- i valori delle azioni assiali di compressione nell'impalcato approssimano bene quelli esatti ($N_{max,gen}/N_{max,ex} = 14111/14062$, esiste una differenza tra le due del 0.35%).

Si conclude pertanto che il procedimento è utilizzabile con efficacia per la valutazione dell'intensità delle pretensioni da assegnare agli stralli.

Trattandosi di un procedimento euristico vanno fatte anche le seguenti osservazioni. Fermo restando il raggiungimento del minimo in termini di EPE, nel significato che abbiamo definito sopra, si osserva che:

- per la soluzione di un problema che presenta simmetria di comportamento si ottengono risultati confrontabili con buona precisione ma non rigorosamente simmetrici;

- alla configurazione di EPE dell'impalcato non corrispondono degli spostamenti verticali dei punti di ancoraggio rigorosamente nulli; l'impalcato quindi può essere visto come una trave continua su appoggi soggetti a cedimenti sia pure di piccola entità.

Questi aspetti rendono non utilizzabili i risultati ottenuti sull'impalcato in termini di momento e taglio.

Infatti, come si può dedurre dai diagrammi, oltre al venir meno delle simmetrie cui si è già fatto cenno in precedenza, si notano anche scostamenti dei valori massimi e minimi molto significativi sia nell'ambito della stessa soluzione genetica, sia nel confronto con la soluzione esatta di riferimento.

5.7 La risoluzione con il codice genetico

Un ponte troppo rigido, come visto nei paragrafi precedenti, crea problemi.

Per eliminarli si possono utilizzare soluzioni tecnologiche, quali ad esempio vincoli bilateri, o rinunciare parzialmente alla indeformabilità. Infatti, permettere spostamenti agli ancoraggi porta nel complesso ad una riduzione delle pretensioni e conseguentemente all'eliminazione della trazione al vincolo.

Obiettivo del codice genetico è appunto la ricerca di una combinazione di tiri in modo da risolvere i problemi evidenziati.

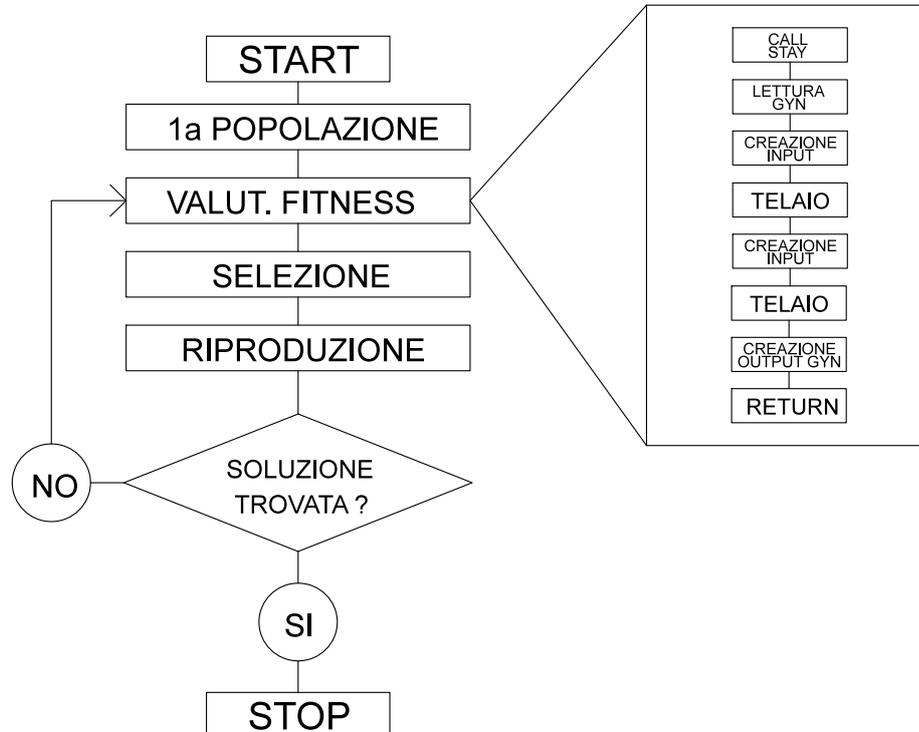


Figura 5.36: Flow chart del codice genetico in esame.

In figura 5.36 vengono messi in evidenza i passaggi utili al raggiungimento della valutazione della fitness. Essa non è più, come per i casi visti precedentemente, una sostituzione di valori all'interno di una funzione matematica, ma dipende dalla risoluzione di una struttura di ingegneria civile. Questo compito è demandato ad un codice ad elementi finiti sviluppato in ambiente Fortran.

Definita la combinazione di tiri da parte dell'algorithm genetico, viene richiamato un altro codice che crea il file *input.txt* che viene successivamente letto da un ulteriore programma che risolve la struttura e restituisce i parametri che permettono la valutazione della fitness e dei vincoli imposti.

5.7.1 La funzione fitness e i vincoli

Per il problema in esame è stata adottata come funzione fitness l'energia potenziale elastica del problema, minore è l'energia migliore è l'individuo.

Obiettivo delle valutazioni è rendere di compressione o al limite nulla la reazione sugli appoggi, per questo motivo è stato introdotto il vincolo seguente.

$$R_1 \geq 0 \quad R_2 \geq 0$$

Un ulteriore controllo è stato messo sulle azioni assiali degli stralli 1 e 24, essi devono sempre risultare positivi nel caso di carico sbilanciato sulle campate laterali, in questo modo si garantisce che esso non vada in lasco.

5.7.2 Le variabili

Le variabili del problema sono i 24 tiri da applicare agli stralli.

Ulteriori dati che vanno assegnati all'interno del codice genetico sono quelle che caratterizzano il processo di selezione e riproduzione. Per il codice in esame è stata presa in considerazione una popolazione di 200 individui, ognuno dei quali caratterizzato da 12 geni, gli spostamenti.

Le probabilità di crossover e mutazione sono rispettivamente prese pari a 70% e 5%. Il numero massimo di iterazioni ammesso è di 100, ma le analisi terminano se l'80% degli individui che compongono la popolazione coincidono con il migliore.

5.7.3 La soluzione

Al termine delle analisi si è ottenuta la seguente combinazione di tiri:

$$\begin{array}{lll}
 T_1 = 15547kN & T_2 = -60961kN & T_3 = 23330kN \\
 T_4 = 28713kN & T_5 = -40466kN & T_6 = 48167kN \\
 T_7 = 54573kN & T_8 = -37848kN & T_9 = -29759kN \\
 T_{10} = 20500kN & T_{11} = 53415kN & T_{12} = -54764kN \\
 T_{13} = -38282kN & T_{14} = 68370kN & T_{15} = -4533kN \\
 T_{16} = -77809kN & T_{17} = 76448kN & T_{18} = -24586kN \\
 T_{19} = -3333kN & T_{20} = -18862kN & T_{21} = 17272kN \\
 T_{22} = 34198kN & T_{23} = -85275kN & T_{24} = 18443kN
 \end{array}$$

A cui corrisponde una EPE pari a $13736 kN \cdot m$ e il rispetto di tutti i vincoli. Nei seguenti grafici vi sono rappresentati l'andamento degli individui al proseguire dei cicli e l'andamento dell'EPE minima.

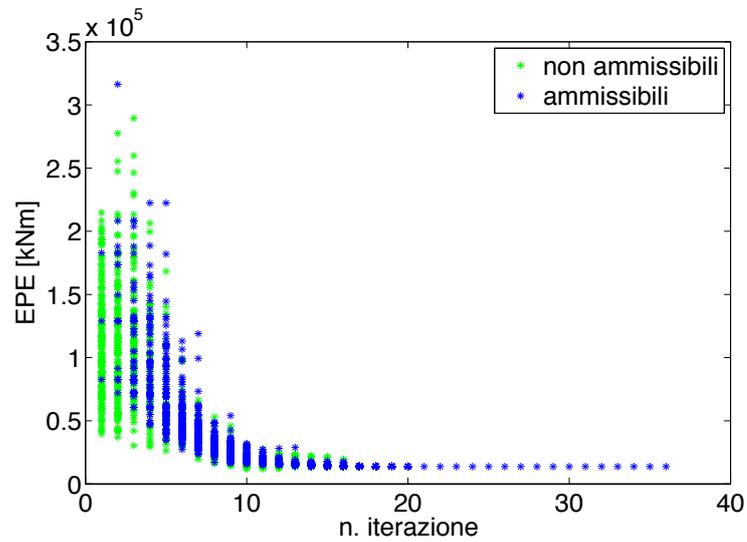


Figura 5.37: Andamento dell'energia potenziale elastica al proseguire dei cicli.

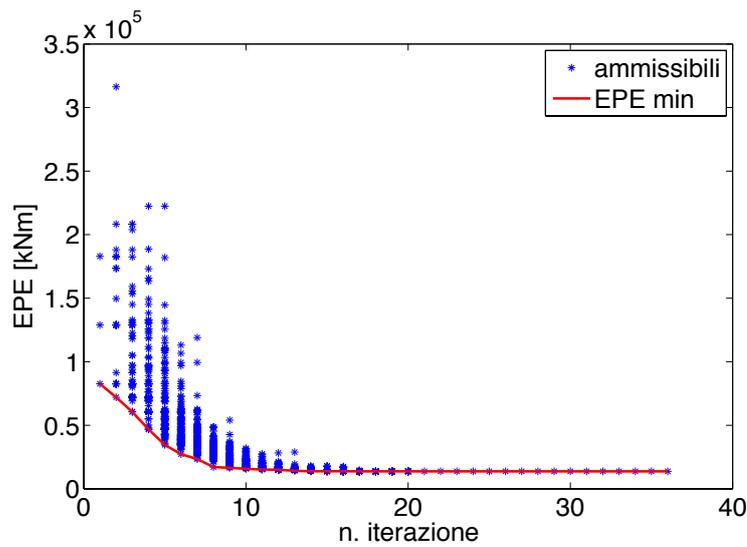


Figura 5.38: Andamento del minimo dell'EPE al proseguire dei cicli.

Nelle seguenti figure vi sono le sollecitazioni interne e le deformate per la struttura.

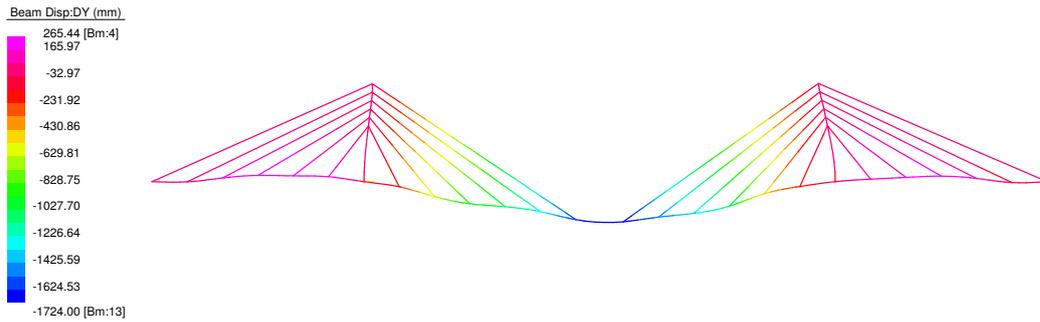


Figura 5.39: Deformata dell'impalcato sotto il solo peso proprio.

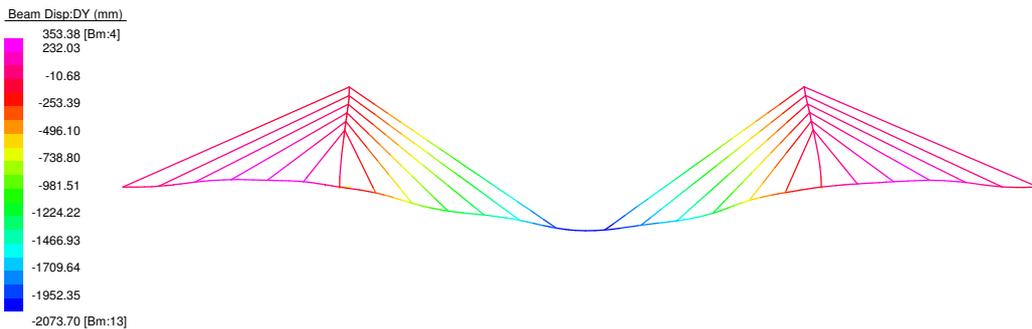


Figura 5.40: Deformata dell'impalcato sotto l'azione del peso proprio e del carico di servizio sulla campata centrale [mm].



Figura 5.41: Reazioni vincolari nel caso di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale [kN].

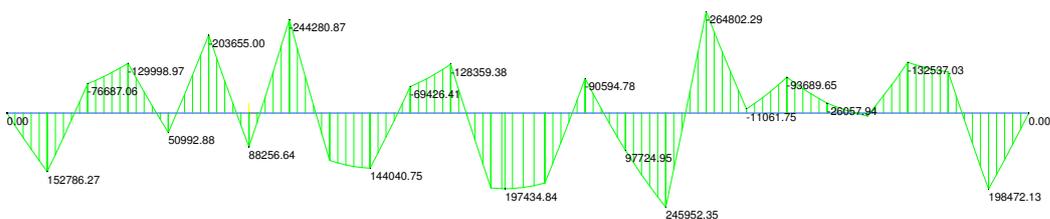


Figura 5.42: Andamento dei momenti flettenti sull'impalcato in presenza di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale [kN · m].

Come era evidente già dai valori dei tiri, la figura 5.44 mostra che alcuni cavi, per carico sbilanciato sulla campata centrale, finiscono in compressione, situazione non auspicabile.

Inoltre entrambe le deformate mostrano spostamenti totalmente al di sopra dei limiti accettabili.

Conclusioni e sviluppi futuri

La tesi ha affrontato i ponti strallati e le problematiche relative alla scelta degli schemi di vincolo e configurazioni geometriche. Particolare attenzione è stata dedicata alla determinazione delle pretensioni da assegnare agli stralli.

Il comportamento di un sistema strallato richiede la comprensione del funzionamento meccanico dell'elemento fune. A questo scopo è dedicata la prima parte del lavoro che imposta e risolve tutte le soluzioni storicamente sviluppate per lo studio della fune pesante: parabola inestensibile, catenaria inestensibile, catenaria elastica.

La terza soluzione, a differenza delle prime due, richiede il ricorso a tecniche numeriche, ma consente di cogliere, senza approssimazione, il comportamento di una fune e, in particolare, l'evoluzione della sua rigidità al variare del livello di tensione, fino a tendere a quella di una biella. Tale comportamento è stato evidenziato mostrando anche la dipendenza dal peso e dall'inclinazione del cavo. Si è ottenuto che più il cavo è orizzontale, tanto maggiore è l'influenza del peso e tanto maggiore è la conseguente riduzione di rigidità.

La seconda parte del lavoro ha ripreso i principali criteri per la determinazione dei tiri negli stralli al fine di ottenere livellette di impalcato secondo predefinite condizioni di progetto. Si sono inoltre confrontati diversi tipi di modellazione del sistema strutturale, aventi complessità crescente: la biella lineare, la biella non lineare e la catenaria.

Nell'ultima parte del lavoro si è presentato il problema dell'ottimizzazione strutturale. Fra i tanti metodi a disposizione, si è scelto di utilizzare un algoritmo genetico, ispirato ai principi dell'evoluzione naturale darwinista.

Particolare attenzione è stata dedicata alla scelta di un indicatore di riferimento che possa essere utilizzato come parametro di ottimizzazione. Si è mostrato, mediante esempi trattati col calcolo manuale, come l'energia potenziale elastica del sistema possa ritenersi un adeguato indicatore del regime tenso-deformativo della struttura. Si è in seguito generalizzato tale risultato mediante la procedura completa di ottimizzazione.

Le potenzialità di un tale approccio sono state evidenziate risolvendo alcuni problemi caratteristici dei ponti strallati. In alcuni casi la procedura ha fornito esiti positivi e si è rilevata particolarmente efficace, in altri si sono ottenute soluzioni matematicamente corrette, ma prive di significato pratico.

I problemi sono stati commentati fornendo le possibili soluzioni che, in generale, richiedono variazioni allo schema del ponte, la prescrizione di vincoli bilateri e/o l'aggiunta di zavorre alle estremità.

Lo studio di tutti i problemi trattati è stato affrontato mediante codici strutturali sviluppati in modo indipendente. Anche l'analisi genetica è stata formalizzata in uno

specifico codice creato ad hoc.

I programmi realizzati sono stati validati, ove possibile, mediante calcolo manuale. Per i problemi più complicati, i confronti sono stati effettuati con il software commerciale Straus7.

Al termine di questo lavoro si possono prevedere ulteriori sviluppi. Nell'esposizione dei metodi per la determinazione del tiro sono state trovate soluzioni inconsistenti che sono tali in quanto riproducono ipotesi di progetto errate. Dal punto di vista strutturale rimane quindi aperto il problema di definire quali siano le condizioni fisiche che si possono porre in modo consistente, ovvero che permettano il raggiungimento dei risultati voluti senza bypassare il corretto funzionamento del ponte strallato.

Un approccio di questo tipo può essere risolto ancora con l'ausilio di tecniche di soft-computing, ma richiede un'impostazione del problema più generale, che esplori non solo lo stato di pretensioni da assegnare agli stralli, ma anche la geometria, la connettività e la tipologia del ponte strallato.

Bibliografia

- [1] J. S. Arora. *Introduction to optimum design*. Elsevier Academic Press, New York, 2004.
- [2] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [3] E. Benvenuto. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Manuali Sansoni, 1981.
- [4] F. Biondini. Optimal Limit states design of concrete structures using genetic algorithms. *STUDI E RICERCHE*, 20, 1999.
- [5] F. Biondini, P.G. Malerba, and M. Quagliaroli. Structural optimization of cable systems by genetic algorithms. *Proceedings of The 2011 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics, Seoul, Korea*, 2011.
- [6] F. Biondini and A. Marchiondelli. Multidimensional design and systemic vision in structural engineering.
- [7] F. Bontempi, P. G. Malerba, and F. Ciccone. Sull'analisi non-lineare dei ponti strallati precompressi. *STUDI E RICERCHE*, 16, 1995.
- [8] D.W. Chen, F.T.K. Au, L.G. Tham, and P.K.K. Lee. Determination of initial cable force in prestressed concrete cable-stayed bridges for given design deck profiles using the force equilibrium method. *Computers & Structures*, 2000.
- [9] F. Dischinger. Hangebrücken für schwerste Verkehrslasten. *Bauingenieur*, 2(3, 4):65–67, 107–113, 1949.
- [10] H.J. Ernst. Der E-modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges. *Der Bauingenieur*, 40(2):52–55, 1965.
- [11] A.M.S. Freire, J.H.O. Negrão, and A.V. Lopes. Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, 2006.
- [12] R.E. Gilsanz and J.M. Biggs. Cable-stayed bridges: degrees of anchoring. *Journal of Structural Engineering*, 109, 1983.
- [13] R. L. Haupt and S. E. Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. Wiley, 2004.

-
- [14] F. Herrera, M. Lozano, and J.L. Verdegay. Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis. *Artificial Intelligence Review*, 12(4):265–319, 1998.
- [15] H. M. Irvine. *Cable structures*. Dover Publications, New York, 1992.
- [16] R. Karoumi. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers & Structures*, 1999.
- [17] P. Krishna. *Cable-suspended roofs*. McGraw-Hill, New York, 1978.
- [18] Y. C. Loo and G. Iseppi. Nonlinear Effects Of Cable Sag - A Case Study. *Cable-Stayed Bridges (Experience and Practice)*, pages 289–300, 1987.
- [19] V. Lute, A. Upadhyay, and K.K. Singh. Genetic Algorithms-Based Optimization of Cable Stayed Bridges. *Journal Software Engineering & Application*, 4:571–578, 2011.
- [20] P.G. Malerba. I ponti strallati. Il contributo di Francesco Martinez Y Cabrera, 2005. Politecnico di Milano, P.za L. da Vinci, Milano, Italy.
- [21] J.L. Meek. *Computer methods in structural analysis*. E & FN Spon, 1991.
- [22] Mitchell Melanie. *An introduction to genetic algorithms*. First MIT Press paperback edition, London, 1998.
- [23] Z. Michalewicz. *Genetic algorithms + data structures*. Springer, 1996.
- [24] M. Patelli and M. Quagliaroli. Ricerca di forma e analisi di strutture composte da funi. Master thesis, Politecnico di Milano, supervisore: Prof. P.G. Malerba, 2009.
- [25] J.S. Przemieniecki. *Theory of matrix structural analysis*. Dover Publications, 1985.
- [26] M. Quagliaroli. Intelligenza artificiale nella progettazione ottimale di cupole di funi. *Report per il Corso di Soft Computing, Scuola di Dottorato in Ingegneria Sismica, Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Milano*, 2010.
- [27] A. Quarteroni, F. Saleri, and R. Sacco. *Matematica numerica*. Springer, 2008.
- [28] S.P. Seif and W.H. Dilger. Nonlinear analysis and collapse load of P/C cable-stayed bridges. *Journal of Structural Engineering*, 116, 1990.
- [29] F. Selleri. *I ponti strallati*. Tipografia editrice pisana, Pisa, 1992.
- [30] L. Sgambi. *I metodi dell'intelligenza artificiale nell'analisi e nella progettazione di ponti sospesi*. PhD thesis, Ph. D. Thesis on Civil Engineering, University of Rome "La Sapienza", Advisor Prof. F. Bontempi., 2005.
- [31] S. P. Timoshenko and Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [32] R. Walther, B. Houriet, W. Isler, P. Moia, and J.F. Klein. *Cable stayed bridges*. Thomas Telford Publishing, London, 1999.

- [33] S.J. Wu and P.T. Chow. Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses. *Computers & structures*, 56(6):979–991, 1995.

Elenco delle figure

1.1	Progetto di Loescher.	1
1.2	Particolare del ponte Albert Bridge.	2
1.3	Aumento della lunghezza della massima campata, espressa in $[m]$, al passare degli anni.	3
1.4	I 20 ponti più lunghi al mondo, è evidenziata la campata maggiore. Le lunghezze sono espresse in $[m]$.	4
1.5	Classificazione in base alla disposizione degli stralli.	5
1.6	Diverse configurazioni delle antenne.	6
1.7	Particolare del ponte sull'Adda.	6
1.8	Sistemi di ancoraggio in sommità delle antenne.	6
1.9	Possibili sezioni di calcestruzzo.	8
1.10	Possibili sezioni in acciaio.	8
1.11	Sezioni di fune spiroidale semplice.	9
1.12	Sezioni di fune spiroidali chiuse.	9
1.13	Gli stralli.	10
1.14	Alga.	11
1.15	Tensoteci.	11
2.1	Galileo Galilei, <i>Discorsi</i> .	13
2.2	Teorema di Pardies.	14
2.3	La dimostrazione di Leibniz.	15
2.4	Tratto infinitesimo di filo.	16
2.5	Condizioni al contorno.	18
2.6	Confronto fra catenaria e parabola.	26
2.7	Catenarie.	27
2.8	Catenarie tese su un piano orizzontale.	27
2.9	Tiro di un cavo lasco.	28
2.10	Andamento rigidezza, appoggi allo stesso livello.	28
2.11	Schema delle analisi.	29
2.12	Andamento rigidezza al variare dell'inclinazione del cavo.	29
2.13	Rapporto delle lunghezze che si hanno in corrispondenza di rigidezza pari alla biella in funzione dell'angolo di inclinazione. Si può notare che all'aumentare dell'inclinazione il cavo richiede una maggiore pretensione.	30
2.14	Andamento delle grandezze caratteristiche al variare dell'inclinazione. Si noti che alcuni cavi fino ai 40° non possono essere messi in opera in quanto lavorano ad una tensione maggiore di quella ammissibile.	30
2.15	Struttura di riferimento.	33

3.1	Struttura di riferimento.	35
3.2	Strutture ausiliarie.	36
3.3	Struttura di riferimento con due stralli.	36
3.4	Mensola analizzata.	37
3.5	Spostamenti per il carico distribuito.	38
3.6	Spostamenti per la pretensione.	38
3.7	Spostamenti per la combinazione di q e T .	38
3.8	Carico viaggiante sulla mensola.	38
3.9	Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 21.	39
3.10	Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 62.	39
3.11	Spostamenti per il carico viaggiante nel nodo 85.	39
3.12	Linea di influenza dell'azione assiale dello strallo, funzione delle posizioni assunte dal carico viaggiante.	40
3.13	Linea di influenza dello spostamento del nodo finale dello strallo, funzione delle posizioni assunte dal carico viaggiante.	40
3.14	Geometria del ponte.	41
3.15	Numerazione degli elementi del ponte strallato.	42
3.16	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 1.	43
3.17	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 2.	43
3.18	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 3.	43
3.19	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 4.	43
3.20	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 5.	44
3.21	Spostamenti nel caso di pretensione nello strallo n. 6.	44
3.22	Spostamenti nel caso di peso proprio.	44
3.23	Istogramma rappresentante i tiri negli stralli.	45
3.24	Spostamenti in presenza di peso proprio e pretensione degli stralli.	45
3.25	Equivalenza tra ponte strallato e trave continua.	45
3.26	Andamento dei momenti all'interno dell'impalcato, $[kN \cdot m]$.	45
3.27	Carico viaggiante sul ponte.	46
3.28	Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 20.	46
3.29	Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 40.	46
3.30	Spostamenti in presenza di forza concentrata nel nodo 60.	46
3.31	Linea di influenza dell'azione assiale all'interno dello strallo 134 in funzione della posizione assunta dal carico viaggiante.	47
3.32	Linea di influenza dell'azione assiale all'interno dello strallo 138 in funzione della posizione assunta dal carico viaggiante.	47
4.1	Il viadotto Millau in Francia.	49
4.2	Flow Chart dell'algoritmo.	50
4.3	Il cromosoma, la rappresentazione di un individuo.	51
4.4	La selezione mediante roulette.	52
4.5	Tipi di crossover.	53
4.6	La mutazione.	53
4.7	$f(x, y) = x^2 + y^2$, senza l'imposizione di vincoli.	55
4.8	$f(x, y) = x \cdot \sin(4x) + 1.1 \cdot y \cdot \sin(2y)$, senza l'imposizione di vincoli.	56
4.9	$f(x, y) = x \cdot \sin(4x) + 1.1 \cdot y \cdot \sin(2y) + 200$, con l'imposizione di vincoli.	57
4.10	La struttura.	58

4.11	Risoluzione struttura in esame.	58
4.12	Soluzione nel caso di aggiunta dello strallo di riva.	59
4.13	Il dominio della prima popolazione.	60
4.14	La soluzione del problema.	60
4.15	La soluzione al nono ciclo di iterazione.	61
4.16	Soluzione ottimale mediante codice genetico.	62
5.1	Ponte dello svincolo di Certosa, Milano.	63
5.2	Condizioni di vincolo.	64
5.3	Distribuzione degli sforzi assiali $[kN]$.	65
5.4	Connettività del ponte.	65
5.5	Sezioni di calcestruzzo.	66
5.6	Numerazione stralli di metà ponte.	66
5.7	Le combinazioni di carico.	66
5.8	Istogramma dei tiri.	67
5.9	La deformata.	68
5.10	Combinazione: $\sum T_i + g_k$.	68
5.11	Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulla sola campata centrale.	68
5.12	Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulle campate centrale e destra.	68
5.13	Combinazione: $\sum T_i + g_k + q_k$, q_k sulla sola campata destra.	68
5.14	Soluzione mediante minimi quadrati.	70
5.15	Soluzione ottenuta rinunciando al vincolo dell'antenna.	70
5.16	Soluzione ottenuta eliminando il secondo e il penultimo strallo.	71
5.17	Soluzione ottenuta eliminando gli stralli di riva.	72
5.18	Struttura di riferimento.	72
5.19	Andamento del momento flettente.	73
5.20	Strutture ausiliarie.	74
5.21	Struttura di riferimento.	74
5.22	Andamento del momento flettente della struttura che si sta analizzando.	75
5.23	Strutture ausiliarie.	75
5.24	La linea di influenza.	75
5.25	Momento flettente della struttura che si sta analizzando.	76
5.26	Struttura fittizia.	76
5.27	Andamento di v^* .	77
5.28	Istogramma di confronto.	78
5.29	Andamento dell'energia potenziale al proseguire dei cicli.	79
5.30	Le deformate in direzione x .	79
5.31	Le deformate in direzione y .	80
5.32	Andamento azioni assiali all'interno degli stralli, $[kN]$.	80
5.33	Andamento azioni assiali all'interno dell'impalcato, $[kN]$.	81
5.34	Andamento momenti flettenti all'interno dell'impalcato, $[kN \cdot m]$.	81
5.35	Andamento azioni di taglio all'interno dell'impalcato, $[kN]$.	82
5.36	Flow chart del codice genetico in esame.	83
5.37	Andamento dell'energia potenziale elastica al proseguire dei cicli.	85
5.38	Andamento del minimo dell'EPE al proseguire dei cicli.	85
5.39	Deformata dell'impalcato sotto il solo peso proprio.	86

5.40	Deformata dell'impalcato sotto l'azione del peso proprio e del carico di servizio sulla campata centrale $[mm]$.	86
5.41	Reazioni vincolari nel caso di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale $[kN]$.	86
5.42	Andamento dei momenti flettenti sull'impalcato in presenza di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale $[kN \cdot m]$.	86
5.43	Andamento dell'azione assiale sull'impalcato in presenza di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale $[kN]$.	87
5.44	Andamento dell'azione assiale all'interno degli stralli in presenza di carico di servizio sbilanciato sulla campata centrale $[kN]$.	87
5.45	Sezione dell'impalcato.	87

Elenco delle tabelle

2.1	Tabella di sintesi.	31
3.1	Dati geometrici degli elementi del ponte.	41
4.1	Confronto soluzioni.	56
4.2	Confronto soluzioni.	56
4.3	Confronto soluzioni.	57
5.1	L'EPE per varie combinazioni di carico.	77

Appendice A

Listato del programma Catenaria

Nel seguito è possibile trovare il codice utilizzato all'interno del capitolo 2 per la risoluzione della catenaria elastica con i file connessi.

A.1 Il file di input

Nel seguito è riportato il file *input.txt* letto dal programma.

```
Maxiter e tolleranza
1000000000
0.000002
Caratteristiche catenaria
56.5685
56.5685
80
3.1416e-04
210E+09
2.5465e+05
Numero suddivisione L0
1000
Confronto pesi
1
10
50000
0.9
1.1
```

Il numero massimo dei cicli e la tolleranza sono i parametri da modificare per regolare l'integrazione di Newton-Raphson.

Nella sezione *Caratteristiche catenaria* devono essere messe nel seguente ordine:

- distanza orizzontale tra i due estremi [m];
- distanza verticale tra i due estremi [m];
- lunghezza totale della fune [m];
- area del cavo [m^2];
- modulo di Young [N/m^2];
- peso specifico [N/m^3].

Il numero massimo di suddivisioni definisce l'intervallo dx di integrazione.
La sezione *Confronto pesi* va così compilata:

- inserire 1 se si vuole effettuare il confronto tra catenaria pesante e leggera, 0 altrimenti;
- coefficiente di proporzionalità tra i pesi;
- numero di suddivisioni di L_0 per definire l'intervallo di dx ;
- definizione del punto da cui partire con il confronto, detto α questo coefficiente, il punto di inizio sarà a $\alpha \cdot L_0$;
- definizione del punto di fine del confronto.

A.2 Il file di output

```
-----
--      RISOLUZIONE DI UNA CATENARIA ELASTICA      --
---                      Sara Bocus                      ---
-----

Grandezze utili ai fini del calcolo di H e V:
Maxiter:                      1000000000
Tolleranza: 0.20000E-05
-----

Caratteristiche catenaria:
Luce:                          56.57 m
Dislivello:                     56.57 m
Lunghezza:                      80.00 m
Area:                          0.31416E-03 m^2
Modulo Elastico: 0.21000E+12 N/m^2
Densita:                       0.25465E+06 N/m^3
-----

Numero suddivisioni di L0: 1000
I dati per il tracciamento sono
nel file plot.dat
-----

Si effettua il confronto dei pesi
Coeff. proporzionalita dei pesi: 10.00000
n. suddivisioni di L0: 50000
Per il confronto si tiene conto della porzione
0.90000 - 1.10000 di L0
-----
```

A.3 Il programma

```

C-----
C   PROGRAMMA PER L'ANALISI NON LINEARE DI CATENARIE ELASTICHE
C-----

C-----
C   COMMON
C-----

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      COMMON /C1/ MAXITER,TOLL
      COMMON /C2/ GLUX,GDIS,GLUNG,GAREA,GYOUNG,GRHO
      COMMON /C3/ V,H,W,T
      COMMON /C4/ NSUD
      COMMON /C5/ IPESI,PSUD,PPESI,PIN,POUT,SS

C-----
C   MAIN
C-----

      PROGRAM CATENARIA
      INCLUDE "COMMON.FOR"
      CHARACTER*80 TITLE

      OPEN(UNIT=10,FILE='input.txt',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(UNIT=12,FILE='output.txt',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(UNIT=11,FILE='plot.dat',STATUS='UNKNOWN')

      WRITE(12,('-----'))
      WRITE(12,('--   RISOLUZIONE DI UNA CATENARIA ELASTICA   --'))
      WRITE(12,('---                               Sara Bocus                               ---'))
      WRITE(12,('-----'))

      CALL RINPUT

      IF(IPESI.EQ.1)THEN
        OPEN(UNIT=13,FILE='pesi.dat',STATUS='UNKNOWN')
        ALPHA = ATAN(GDIS/GLUX)
        INIZ = INT(PIN*PSUD)+1
        IFIN = INT(POUT*PSUD)+1
        DO I=INIZ,IFIN
          SS=(I-1)*GLUNG/PSUD
          WRITE(*,*)SS
          W=GRHO*GAREA*GLUNG
          CALL HVP(SS)
          TT=T
          W=GRHO+GAREA*GLUNG*PPESI
          CALL HVP(SS)
          WRITE(13,*)SS*COS(ALPHA),TT,T
        END DO
        CLOSE(13)
      END IF

      IF(IPESI.EQ.0)THEN
        W=GRHO*GAREA+GLUNG
        ALUX=GLUX
        CALL HV(ALUX)
        CALL XYT
      END IF

      CLOSE(10)
      CLOSE(11)
      CLOSE(12)
      STOP
      END

```

```

C-----
C   SUBROUTINE LETTURA FILE "input.txt"
C-----

SUBROUTINE RINPUT
INCLUDE "COMMON.FOR"
CHARACTER*80 REC

READ(10,100)REC
WRITE(12,'(1X,"Grandezze utili ai fini del calcolo di H e V:")')
READ(10,*)FITER
MAXITER = INT(FITER)
WRITE(12,'(1X,"Maxiter:",E12.5)')FITER
READ(10,*)TOLL
WRITE(12,'(1X,"Tolleranza:",E12.5)')TOLL
WRITE(12,'("-----")')
WRITE(12,'(1X,"Caratteristiche catenaria:")')
READ(10,100)REC
READ(10,*)GLUX
WRITE(12,'(1X,"Luce:",12X,F12.2,1X,"m")')GLUX
READ(10,*)GDIS
WRITE(12,'(1X,"Dislivello:",6X,F12.2,1X,"m")')GDIS
READ(10,*)GLUNG
WRITE(12,'(1X,"Lunghezza:",7X,F12.2,1X,"m")')GLUNG
READ(10,*)GAREA
WRITE(12,'(1X,"Area:",12X,E12.5,1X,"m^2")')GAREA
READ(10,*)GYOUNG
WRITE(12,'(1X,"Modulo Elastico:",1X,E12.5,1X,"N/m^2")')GYOUNG
READ(10,*)GRHO
WRITE(12,'(1X,"Densita:",9X,E12.5,1X,"N/m^3")')GRHO
WRITE(12,'("-----")')
READ(10,100)REC
READ(10,*)NSUD
WRITE(12,'(1X,"Numero suddivisioni di L0:",1X,I4)')NSUD
WRITE(12,'(1X,"I dati per il tracciamento sono")')
WRITE(12,'(1X,"nel file plot.dat")')
WRITE(12,'("-----")')
READ(10,100)REC
READ(10,*)IPESI
IF(IPESI.EQ.1)THEN
  WRITE(12,'(1X,"Si effettua il confronto dei pesi")')
  READ(10,*)PPESI
  WRITE(12,'(1X,"Coeff. proporzionalita dei pesi:"
+ ,1X,F12.5)')PPESI
  READ(10,*)PSUD
  WRITE(12,'(1X,"n. suddivisioni di L0:",1X,I6)')INT(PSUD)
  READ(10,*)PIN
  READ(10,*)POUT
  WRITE(12,'(1X,"Per il confronto si tiene conto della porzione")')
  WRITE(12,'(1X,F12.5,1X,"-",F12.5,1X,"di L0")')PIN,POUT
  WRITE(12,'("-----")')
END IF
RETURN
100  FORMAT(A80)
END

```

```

C-----
C   SUBROUTINE PER LA RISOLUZIONE DI NEWTON-RAPHSON
C-----

      SUBROUTINE HV(AL)
      INCLUDE "COMMON.FOR"

      DIS = GDIS
      ALO=GLUNG
      A=GAREA
      E=GOUNG

C INIZIALIZZO LE CONDIZIONI INIZIALI PER L'INTEGRAZIONE
      HO=1
      VO=1

C CALCOLO DELLE DERIVATE IN XO=[HO;VO]

      DLH=(ALO*(ASINH(VO/HO)+ASINH((VO-W)/HO)))/W+ALO/(A*E)+
      +(HO*ALO*((VO-W)/(HO**2*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1.DO)
      +**0.5)-VO/(HO**2*(VO**2.DO/HO**2.DO+1.DO)**0.5)))/W

      DLV=(HO*ALO*(1.DO/(HO*(VO**2.DO/HO**2.DO-1.DO)**0.5)-
      +1.DO/(HO*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1.DO)**0.5)))/W

      DHH=ALO/W*((VO**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5-((VO-W)**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5)-ALO/W*(VO**2.DO/(HO**2.DO*(VO**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5)-(VO-W)**2.DO/(HO**2.DO*(VO-W)**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5))

      DHV=ALO/(A*E)-ALO/W*((VO-W)/(HO*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5)
      +VO/(HO*(VO**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5))

C DETERMINANTE DELLO JACOBIANO
      DETJ=DLH*DHV-DHH*DLV

C FUNZIONI PER I VALORI INIZIALI
      FL=HO*ALO/(E*A)+HO*ALO/W*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO))-AL

      FH=W*ALO/(E*A)*(VO/W-1.DO/2.DO)+HO*ALO/W*
      +((1.DO+(VO/HO)**2.DO)**0.5-(1.DO+((VO-W)/
      +HO)**2.DO)**0.5)-DIS

      H=HO-1.DO/DETJ*(FL*DHV-FH*DLV)
      V=VO-1.DO/DETJ*(FH*DLH-FL*DHH)

      IF((ABS(FH).LT.TOLL).AND.(ABS(FV).LT.TOLL)) GOTO 10

      DO I=1,MAXITER
C REINIZIALIZZO HO E VO
      HO=H
      VO=V

C RICALCOLO LE FUNZIONI
      FL=HO*ALO/(E*A)+HO*ALO/W*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO))-AL
      FH=W*ALO/(E*A)*(VO/W-1.DO/2.DO)+HO*ALO/W*((1.DO+(VO/
      +HO)**2.DO)**0.5-(1.DO+((VO-W)/HO)**2.DO)**0.5)-DIS

C RICALCOLO H E V
      H=HO-1.DO/DETJ*(FL*DHV-FH*DLV)
      V=VO-1.DO/DETJ*(FH*DLH-FL*DHH)

      EH=ABS((H-HO)/HO)
      EV=ABS((V-VO)/VO)

```

```

        IF((ABS(FH).LT.TOLL).AND.(ABS(FV).LT.TOLL)) GOTO 10

    END DO

10  IF(I.GT.MAXITER)THEN
        WRITE(*,'("Convergenza non raggiunta")')
        WRITE(12,'(1X,"Convergenza non raggiunta")')
        STOP
    END IF

    IF(IPESI.EQ.0)THEN
        WRITE(12,'(1X,"Convergenza raggiunta")')
        WRITE(12,'(1X,"Le sollecitazioni sono:")')
        WRITE(12,'(1X,"H",F12.2,1X,"N")')H
        WRITE(12,'(1X,"V",F12.2,1X,"N")')V
        WRITE(12,'(1X,"Ciclo finale n:",I5)')I
        WRITE(12,'(1X,"Errore su H",F12.5)')EH
        WRITE(12,'(1X,"Errore su V",F12.5)')EV
    END IF

    WRITE(*,'(1X,"Convergenza raggiunta")')
    WRITE(*,'(1X,"H",E12.5)')H
    WRITE(*,'(1X,"V",E12.5)')V
    WRITE(*,'(1X,"EH",F12.5)')EH
    WRITE(*,'(1X,"EV",F12.5)')EV

C CONTROLLO CHE I VALORI CALCOLATI RESTITUISCANO I GIUSTI VALORI IN INGRESSO
    HO=H
    VO=V

C RICALCOLO LE FUNZIONI
    FL=HO*ALO/(E*A)+HO*ALO/W*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO))-AL
    FH=W*ALO/(E*A)*(VO/W-1.DO/2.DO)+HO*ALO/W*((1.DO+(VO/
+HO)**2.DO)**0.5-(1.DO+((VO-W)/HO)**2.DO)**0.5)-DIS

    WRITE(12,'(1X,"La luce e il dislivello differiscono dai")')
    WRITE(12,'(1X,"dati in ingresso per:")')
    WRITE(12,'(1X,"l-l(H,V)=",E12.5,1X," [m]")')FL
    WRITE(12,'(1X,"h-h(H,V)=",E12.5,1X," [m]")')FH

    WRITE(*,'(1X,"l-l(H,V)=",E12.5,1X," [m]")')FL
    WRITE(*,'(1X,"h-h(H,V)=",E12.5,1X," [m]")')FH
    WRITE(12,'("-----")')

    RETURN
    END

```

```

C-----
C   SUBROUTINE PER LA RISOLUZIONE DI NEWTON-RAPHSON MODIFICATO
C   PER IL CONFRONTO DEI PESI
C-----

      SUBROUTINE HVP(S)
      INCLUDE "COMMON.FOR"

      ALPHA =ATAN(GDIS/GLUX)
      DIS = S*SIN(ALPHA)
      AL = S*COS(ALPHA)
      ALO=GLUNG
      A=GAREA
      E=G YOUNG

C INIZIALIZZO LE CONDIZIONI INIZIALI PER L'INTEGRAZIONE
      HO=1
      VO=1

C CALCOLO DELLE DERIVATE IN XO=[HO;VO]

      DLH=(ALO*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO)))/W+ALO/(A*E)+
      +(HO*ALO*((VO-W)/(HO**2*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1.DO)
      +**0.5)-VO/(HO**2*(VO**2.DO/HO**2.DO+1.DO)**0.5)))/W

      DLV=(HO*ALO*(1.DO/(HO*(VO**2.DO/HO**2.DO+1.DO)**0.5)-
      +1.DO/(HO*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1.DO)**0.5)))/W

      DHH=ALO/W*((VO**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5-((VO-W)**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5)-ALO/W*(VO**2.DO/(HO**2.DO*(VO**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5)-(VO-W)**2.DO/(HO**2.DO*(VO-W)**2.DO/
      +HO**2.DO+1)**0.5))

      DHV=ALO/(A*E)-ALO/W*((VO-W)/(HO*((VO-W)**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5)
      +-(VO/(HO*(VO**2.DO/HO**2.DO+1)**0.5)))

C DETERMINANTE DELLO JACOBIANO
      DETJ=DLH*DHV-DHH*DLV

C FUNZIONI PER I VALORI INIZIALI
      FL=HO*ALO/(E*A)+HO*ALO/W*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO))-AL

      FH=W*ALO/(E*A)*(VO/W-1.DO/2.DO)+HO*ALO/W*
      +((1.DO+(VO/HO)**2.DO)**0.5-(1.DO+((VO-W)/
      +HO)**2.DO)**0.5)-DIS

      H=HO-1.DO/DETJ*(FL*DHV-FH*DLV)
      V=VO-1.DO/DETJ*(FH*DLH-FL*DHH)

      IF((ABS(FH).LT.TOLL).AND.(ABS(FV).LT.TOLL)) GOTO 10

      DO I=1,MAXITER
C REINIZIALIZZO HO E VO
      HO=H
      VO=V

C RICALCOLO LE FUNZIONI
      FL=HO*ALO/(E*A)+HO*ALO/W*(ASINH(VO/HO)-ASINH((VO-W)/HO))-AL
      FH=W*ALO/(E*A)*(VO/W-1.DO/2.DO)+HO*ALO/W*((1.DO+(VO/
      +HO)**2.DO)**0.5-(1.DO+((VO-W)/HO)**2.DO)**0.5)-DIS

C RICALCOLO H E V
      H=HO-1.DO/DETJ*(FL*DHV-FH*DLV)
      V=VO-1.DO/DETJ*(FH*DLH-FL*DHH)

```

```

      IF((ABS(FH).LT.TOLL).AND.(ABS(FV).LT.TOLL)) GOTO 10

      END DO

10    T=(H**2.DO+(V-W*S/ALO)**2.DO)**0.5

      IF(I.GT.MAXITER)THEN
        WRITE(*,'("Convergenza non raggiunta")')
        STOP
      END IF

      WRITE(*,'(1X,"Convergenza raggiunta")')

      RETURN
      END

C-----
C   SUBROUTINE PER IL TRACCIAMENTO DEI GRAFICI DI x-y E
C   DELLA TENSIONE NEL CAVO
C-----

      SUBROUTINE XYT
      INCLUDE "COMMON.FOR"

      C VERRANNO QUI DI SEGUITO ESEGUITI TUTTI I CALCOLO UTILI ALLA STAMPA
      C DELL'ANDAMENTO DELLA CATENARIA NEL PIANO ED EVENTUALMENTE DEL TIRO IN
      C FUNZIONE DELLA COORDINATA LAGRANGIANA

      CHARACTER*80 REC
      C INIZIALIZZAZIONE DI ALCUNE VARIABILI
      AL=GLUX
      DIS=GDIS
      ALO=GLUNG
      A=GAREA
      E=GYOUNG
      S=ALO/NSUD

      DO I=1,NSUD+1
        T=(H**2.DO+(V-W*(I-1)*S/ALO)**2.DO)**0.5
        X=(H*S*(I-1)/(E*A))+H*ALO/W*(ASINH(V/H)-
+ASINH((V-W*(I-1)*S/ALO)/H))
        Z=W*(I-1)*S/(E*A)*(V/W-S*(I-1)/(2.DO*ALO))+H*ALO/W*
+((1+(V/H)**2.DO)**0.5-(1+(V-W*(I-1)*S/ALO)/
+H)**2.DO)**0.5)
        WRITE(11,*)(I-1)*S,X,Z,T
      END DO

      RETURN
100  FORMAT(A80)
      END

```