

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II**  
**MASTER DI II LIVELLO IN INGEGNERIA FORENSE**

Coordinatore: prof. ing. Nicola Augenti



**TESI DI SPECIALIZZAZIONE IN**  
**INGEGNERIA FORENSE CIVILE**

**“Analisi Forense di Dissesti  
nelle Volte in Muratura”**

RELATORE  
ch.mo prof. ing. Nicola AUGENTI

SPECIALIZZANDO  
ing. Giuseppe GUIDA

Anno Accademico 2008-2009

## Sommario

Nell'ambito specialistico della Ingegneria Forense, il nesso fra causa ed evento non può essere semplicemente supposto, o assunto come manifestazione di sapere astratto e men che mai in veste di postulato; esso va invece scientificamente provato -nelle condizioni particolari che connaturano il caso d'indagine- pena la censura della consulenza o della perizia, con il conseguente scardinamento di ogni standard probatorio. Solo il supporto scientifico di una teoria, correttamente applicata dal tecnico nel caso pratico, può conferire al filo logico da egli tenuto, un ragionevole tasso di affidabilità, e quindi dare vigore alle conclusioni.

Partendo da queste considerazioni di ordine generale si analizzano le particolarizzazioni al caso di Dissesti che coinvolgono le strutture voltate in muratura, quali elementi ricorrenti nelle tecniche costruttive del passato. Si delinea il doppio comportamento, lineare in prima fase, e progressivamente non lineare a seguire, esibito dalle volte murarie, con indicatore di passaggio rappresentato dalla fessurazione. Si precisa il ruolo di quest'ultima in rapporto al dissesto e se ne dettagliano le differenze concettuali, censurando metodologie pratiche di attribuzione automatica di una data manifestazione fessurativa ad un unico e predeterminabile dissesto .

Dall'esame del modello concettuale di funzionamento delle volte murarie, quali strutture resistenti per forma ma con forma resistente che si riduce progressivamente (strutture variate), si passa alla disamina del cd. approccio a doppio modello, elastico lineare per la prima fase e a rottura per l'incipiente collasso, individuandone ostacoli pratici in situazioni ricorrenti.

Si propone come approccio unico e risolutivo, quello al passo, formulato nell'alveo standard della elasticità, seppur evidentemente non lineare, precisandone le condizioni di applicabilità ed i test di validazione .

Si affrontano, con queste ipotesi di lavoro, due tipologie diverse, la botte e la vela . La prima viene analizzata nella configurazione nuda ed in due tipi di veste consolidata, con i tradizionali frenelli prima e con le più moderne fasce in FRP poi, disposte secondo opportune direzioni preferenziali .La volta a vela viene esaminata, per brevità, nella sola configurazione nuda. Per ognuno dei modelli si individuano gli elementi caratterizzanti la fase iniziale, in comportamento elastico, quali deformate, mappatura delle tensioni principali max e min sia all'intradosso che all'estradosso. Superato il guado della fessurazione, si esamina l'evoluzione del sistema strutturale con la progressiva erosione delle zone inerti di muratura , e la conseguente variazione di stato tensionale nelle zone maggiormente stressate. Si coglie il meccanismo di incipiente collasso, evidenziandone alcune particolarità .

Con gli interventi di consolidamento si monitorano gli effetti raggiunti, confrontando le curve di capacità della struttura nuda con quella consolidata con le due tecniche, confermandosi in particolare la assoluta efficacia dell'intervento tradizionale mediante frenelli, anch'essi murari, con copertura piana dei campi fra essi definiti (rinfiacco cellulare) . L'intervento di consolidamento in FRP, dopo una breve disamina tecnologica, viene simulato mediante elementi asta non reagenti a compressione, connessi a link alla sottostante struttura voltata . Si segue la progressiva inserzione delle fasce, con il conseguente miglioramento delle condizioni generali di sicurezza della volta, ottenuto grazie alla azione di contenimento delle cerniere plastiche alle reni.

Nella fase conclusiva del lavoro si affronta –a costituire valido supporto scientifico- la comparazione fra risultati numerici e sperimentali ottenuti nella Facoltà di Ingegneria di Cassino con quelli desumibili dalla procedura al passo utilizzata: si ottengono riscontri favorevoli e concordi alla sperimentazione, in particolar modo per il moltiplicatore di collasso e per l'associato meccanismo .

*Parole chiave* : Volte. Muratura. Ingegneria Forense. Analisi non lineare.

## Abstract

The work is initially about a synthesis of the specific features that characterize masonry vaulted structures, as recurring elements in the construction techniques of the past.

It outlines the dual behaviour, linear in a first phase, and progressively non-linear. This is made clear by the stone vaults. The indicator of the passage is represented by the appearance of fissures or cracks. We specify the latter's role in relation to a lack of equilibrium and detail the differences in concepts, methodologies, practices, censoring the automatic attribution of a given event to a unique and predictable lack of equilibrium. The work motivates, with reference to the specific field of Forensic Engineering, the necessity of an accredited scientific foundation as a framework of reference for any evaluation process entrusted to the consultant or expert in order to create the necessary coverage condition ensured by scientific laws, without which the standards of evidence are undermined. We start with an examination of the conceptual model of the functioning of archways that have resistant structures with a progressively reduced resistance (varied structures) to go on to examine the dual-model approach, linear elastic for the first phase and breakable for the incipient collapse, thus identifying practical obstacles in recurrent situations.

The work suggests, the one of the pace, structured in the standard space of elasticity, although clearly not linear, indicating the applicable conditions and validation check

In this working hypothesis, we deal with two different types of vaults: the barrel vault and the groin vault. The first configuration is considered uncovered and in two types of mainstream garment with the traditional Frenelle first and the more modern FRP strips later, placed in the appropriate preferred directions.

The vault is being examined, for brevity, only in the bare configuration.

For each model we identify the elements that characterize the initial stage, during the elastic behaviour, as deformed, mapping the maximum and minimum principal stress both towards the inside face and towards the outside face. Having overcome the problem of the cracking, we examine the evolution of the structural system with the gradual erosion of inert areas of masonry, and the resulting change in tensile strength in the areas under most stress. It captures the mechanism of incipient collapse, highlighting some special features.

By consolidation, it is possible to monitor the achieved effects by comparing the curves of the pure structure with the consolidated one using the two techniques, confirming in particular the absolute effectiveness of traditional means that employ the masonry Frenelle, with a flat roof of the fields (cellular abutment).

The intervention of FRP strengthening, after a brief technological examination, is simulated by non-reagent compression items, linked to the underlying vaulted structure. We follow the gradual insertion of the bands, thereby improving the general safety of the vault, thanks to the action of plastic hinges contained to the kidneys. The final phase of the work looks at the comparison between numerical and experimental results obtained in the Engineering Faculty of Cassino University with the ones available from the procedure used in order to obtain a valuable scientific support.

Thus we obtain positive evidence and agreements in testing, especially for the collapse multiplier and for the associated mechanism.

*Keywords:* Archway. Masonry. Forensic Engineering. Non linear analysis.

*a mio Padre,  
Geometra d'altri tempi*

## INDICE

1.	Introduzione .....	7
1.1	Le strutture voltate in muratura: richiami di comportamento .....	7
1.2	Cause perturbatrici, dissesti e manifestazioni nei solidi fragili. Necessità di un modello di supporto .....	8
1.3	L'aggravamento della necessità dei supporti teorici in ingegneria forense ....	10
1.4	Un modello concettuale per la statica delle volte .....	10
1.5	L'approccio a doppio modello .....	12
1.6	Il punto della situazione .....	13
1.7	L'analisi al passo .....	14
1.8	La procedura proposta .....	16
1.9	Le applicazioni .....	18
2.	La Volta A Botte .....	19
2.1	Aspetti generali .....	19
2.1.1.	La geometria .....	19
2.1.2.	I materiali .....	19
2.1.3.	I carichi .....	20
2.2	L'analisi lineare .....	22
2.3	L'analisi in non linearità meccanica .....	25
2.3.1.	Criteri ed assunzioni .....	25
2.3.2.	Sviluppo .....	26
2.3.3.	Controllo sulle $\varepsilon$ .....	27
2.3.4.	L'assetto limite .....	29
2.4	E le fessurazioni? .....	31
3.	La Volta a Botte Consolidata Con Frenelli .....	34
3.1	Aspetti generali .....	34
3.2	Il modello modificato .....	34
3.2.1.	La geometria .....	34
3.2.2.	I materiali .....	35
3.2.3.	I carichi .....	35
3.2.4.	La riduzione complessiva dei carichi .....	37
3.3	L'analisi lineare .....	37
3.4	L'analisi in non linearità meccanica .....	39
3.4.1.	Sviluppi .....	39
3.4.2.	Controllo sulle $\varepsilon$ .....	40
3.4.3.	Confronto con volta non consolidata .....	42
4.	La Volta a Botte Consolidata Con Fasce In FRP .....	47
4.1	I materiali compositi FRP: caratteristiche generali .....	47
4.1.1.	Brevi richiami di base .....	47
4.1.2.	Produzione delle fibre di carbonio .....	47
4.1.3.	Caratteristiche meccaniche delle fibre di carbonio .....	48
4.1.4.	Caratteristiche della matrice .....	48
4.1.5.	Caratteristiche dei prodotti .....	49
4.1.6.	Comportamento del FRP a trazione: modello concettuale .....	50
4.2	Caratteristiche del rinforzo prescelto .....	50
4.3	Le modifiche al modello .....	54
4.3.1.	La geometria .....	54
4.3.2.	I carichi .....	55

4.4	L'analisi non lineare per meccanica .....	55
4.4.1.	Sviluppo .....	55
4.4.2.	Controllo sulle $\varepsilon$ .....	56
4.4.3.	Confronti con le due situazioni già analizzate .....	57
4.4.4.	Controllo della delaminazione .....	61
5.	La Volta A Vela.....	62
5.1	Aspetti generali .....	62
5.1.1.	La geometria .....	62
5.1.2.	I materiali.....	63
5.1.3.	I carichi .....	63
5.2	L'analisi lineare .....	65
5.3	L'analisi in non linearità meccanica .....	66
5.3.1.	Assunzioni e sviluppi.....	66
5.3.2.	Il controllo delle $\varepsilon$ .....	68
5.3.3.	L'assetto limite .....	68
5.4	E le fessurazioni? .....	70
6.	Comparazione Con Indagini Di Bibliografia.....	72
6.1	Un arco di riferimento.....	72
6.1.1.	Premessa .....	72
6.1.2.	Articolazione del confronto .....	74
7.	Conclusioni .....	79
8.	Bibliografia .....	81

## **1. INTRODUZIONE**

### **1.1 Le strutture voltate in muratura: richiami di comportamento**

Le strutture voltate in muratura si presentano come elementi costruttivi di assoluta specificità e con proprie caratteristiche che le differenziano da altre tipologie ricorrenti utilizzate in passato per la copertura di ambienti .

In prima istanza le specificità sono così descrivibili :

- appartengono alla classe delle strutture resistenti per forma, e cioè nella quali la sagoma della struttura viene prefigurata e stabilita in modo da poter fronteggiare i carichi esterni in regime il più possibile privo di particolari flessioni, per lo meno per la combinazione considerata come più significativa ;
- sono costituite da un “materiale” assai particolare, la muratura, formata da due elementi base, blocchi lapidei e malta; tanto è la influenza dei rapporti reciproci fra i costituenti (forma, dimensioni, modalità di assemblaggio,..) che alla muratura in sé non può di certo difettare il carattere di struttura ;
- il materiale muratura, assolutamente né omogeneo né isotropo, presenta una ulteriore particolarità (certo comune anche al calcestruzzo ma lì risolta grazie all'accoppiamento con l'acciaio) e cioè la nota differenza di comportamento fra compressione e trazione, con quest'ultima assai limitata in rapporto alla prima, ed addirittura spesso trascurata. Mentre le prime due particolarità sono in effetti comuni anche ad altri mezzi con cui l'ingegnere si ritrova ad operare (basti pensare al terreno) e quindi generano minori apprensioni nella riproposizione dello schema di riferimento (il continuo omogeneo ed isotropo), la terza conferisce uno spiccato carattere di non linearità alla risposta strutturale al crescere dei carichi, richiedendo quasi sempre analisi che la portino specificatamente in conto;
- costituiscono elementi raramente progettati ex-novo (e ancor di più eseguiti) nella corrente edificazione moderna; ciò comporta la perdita –nella cultura tecnica ordinaria- di principi base e regole costruttive, e finanche l'assoluto oblio in ordine alle pratiche costruttive (centine, progressione costruttiva, chiusura dell'arco,.... ) che fino ad un tempo non lontano costituivano bagaglio conoscitivo ineludibile tanto per il mastro muratore che per il tecnico che al suo lavoro presiedeva

Dunque strutture particolari, con specifiche caratteristiche, di certo tutt'affatto che semplici, e che se non bastasse sono, e pure frequentemente, oggetto di indagine forense: le cose si complicano ulteriormente poiché mentre all'ingegnere è di norma posto l'obiettivo

di “disegnare e proporzionare” una struttura in modo che la stessa possa resistere a determinati carichi, in piena sicurezza, all’ingegnere forense è tipicamente richiesto di dar risposta al quesito tipo “assegnato l’evento verificatosi, in specifico dissesto o crollo, si determinino le cause che l’hanno cagionato “.

Ecco dunque il cd. ingegnere inverso al quale deve essere noto, per intanto e senza dubbi, la procedura diretta ma devono essere ben note anche le procedure di semeiotica (riconoscimento di segni del dissesto, potenziale o incipiente) , di diagnosi (dall’evento alla causa) e di rimedio (consolidamento) .

## **1.2 Cause perturbatrici, dissesti e manifestazioni nei solidi fragili.**

### **Necessità di un modello di supporto**

Stabilite le particolarità del campo di interesse, va brevemente fatto cenno, non foss’altro per uniformità ed inequivocità di linguaggio, ad alcune definizioni di base, valide in generale per tutte le strutture in dissesto, e che però possono subito particularizzarsi a quelle costituite da materiale fragile, come la muratura .

Non c’è modo migliore di sintetizzare che con le parole di un Maestro [1] : *“I complessi edilizi, nella loro essenza strutturale, sono costituiti di membrature costruttive connesse e dimensionate in modo da poter assolvere, entro i limiti dei carichi di sicurezza, i compiti statici loro affidati. La buona qualità dei materiali, la razionale connessione fra le membrature, l’armonica divisione del lavoro,..... sono le condizioni essenziali per la garanzia della stabilità e della durata d’un complesso edilizio. Ma come in natura tutto cospira alla caducità delle cose, così nelle strutture ... innumerevoli circostanze tendono a vulnerare la resistenza del materiale ... “* . A queste circostanze o comunque ai parametri tecnici che le identificano, viene assegnato il nome di causa perturbatrice .

Alla comparsa di dette cause perturbatrici, l’assetto statico preesistente viene ad essere inevitabilmente alterato, potendosi scivolare verso la ampia casistica del dissesto statico, da intendersi come comportamento o assetto statico “non normale” , inconsueto , non prefigurabile .

Il dissesto, nelle forme più o meno pronunciate (al limite: crollo), equivale ad un cattivo funzionamento d’organi in diagnosi medica; se tale assetto anomalo esiste insorgono nelle murature interessate da un lato degli eccessi di compressione e da un lato dei picchi di trazione intollerabili, che portano alla formazione di lesioni, cioè di soluzioni di continuità nella massa muraria precedentemente integra. Ma tuttavia non è la seconda di per se a preoccupare il tecnico ben preparato, ma bensì la prima perché di dissesto si parla



propriamente se gli eccessi di compressione sono tali da portare a plasticizzazione le fibre più compresse.

La lesione in sé è solo indice della avvenuta parzializzazione della sezione, che quindi si sposta verso un comportamento peraltro insito nella natura del materiale, consueto : ciò che non è né previsto e ne' voluto, e che quindi caratterizza il dissesto, è l'eccesso di compressione : a questo e solo a quest'ultimo è legato infatti un vero e proprio danneggiamento, cioè una escursione nel tratto plastico, con deformazioni residue all'eventuale scarico. Invece per la lesione, al cessare della causa che la ha indotta, è del tutto corretto pensare ad una richiusura .

Dunque un ruolo particolare delle lesioni, in quanto espressione indiretta di un eventuale stato di dissesto, che diviene però reale solo se esiste un eccesso di compressione. E affinché diventi reale è necessario che lo stato tensionale indotto dalla causa perturbatrice, sommandosi a quello preesistente, induca crisi . è lo stato somma e non uno dei singoli addendi a creare le condizioni affinché il dissesto avvenga .

Da questa semplice considerazione, ne discende che ove sia possibile riscontrare, a mezzo di apposite tecniche (analisi dei cigli fessurativi, ipotesi semplificative sulla contrazione trasversale impedita,...) quale sia lo stato somma, sarà possibile sottrarre a questo lo stato preesistente (noto da modello allo scopo predisposto) ottenendo lo stato tensionale associato alla causa perturbatrice .

Con questo approccio viene quindi proscritto un certo sistema di prassi, con il quale dalla manifestazione visibile si risale direttamente alla causa perturbatrice immaginando un legame biunivoco che non c'è', perché la stessa causa perturbatrice, agendo su sistemi pregressi diversi, può portare a manifestazioni del tutto dissimili, venendo quindi a mancare il necessario nesso di causalità usualmente richiesto nei procedimenti forensi .

In altri termini e per maggior chiarezza, in molta manualistica di riferimento, è riportato il concetto di legame biunivoco fra dissesto e manifestazione fessurativa, basando quindi la diagnosi su schede tipo del dissesto, assunto a priori e di manifestazioni fessurative conseguenti, dal che con procedimento inverso, si individua il dissesto .

Si ribadisce che la procedura non è corretta, poiché prescinde dallo stato tensionale pregresso e che per decenni ha pervaso l'intera struttura .

Dunque dei modelli numerici per le diagnosi , a supporto delle stesse, e tali da conferire assoluta incontrovertibilità alle determinazioni, poiché il tutto viene a basarsi su inappuntabili considerazioni teoriche , ma di questo si dirà meglio in ciò che segue.

### 1.3 L'aggravamento della necessarietà dei supporti teorici in ingegneria forense

Si è postulato della necessarietà di un modello (semplice o complesso è altro aspetto) in ogni aspetto che caratterizza l'attività tecnica e tale regola "professionale" è nota anche al più improvvido dei tecnici (ancorché a tratti disattesa). Ma questa fondamentale esigenza trova nell'ambito della ingegneria forense il massimo vigore, poiché il nesso di causalità fra causa ed evento non può essere semplicemente supposto o considerato verosimile per "sapere divino": esso va invece scientificamente provato, pena la censura della consulenza o della perizia, con il conseguente scardinamento di ogni standard probatorio [3].

Solo il supporto scientifico di una teoria, correttamente applicata dal tecnico nel caso pratico, può conferire al filo logico da egli tenuto, un ragionevole tasso di affidabilità, e quindi dare vigore alle conclusioni o, concordemente a Cass. sez. I 6/10/1998 n. 4837 *"...deve ovviamente trattarsi di applicazioni tecniche accreditate e rese pienamente attendibili dal livello del sapere acquisito dalla comunità scientifica..."*.

### 1.4 Un modello concettuale per la statica delle volte

La costruzione del modello concettuale per la statica delle volte deve, per forza di cosa, portare in conto la spiccata non linearità associata alle parzializzazioni delle sezioni, e a quella associata alle plasticizzazioni delle fibre maggiormente compresse.

Tanto per fissare le idee, si consideri un sistema voltato, a semplice curvatura, in regime di stato piano, o ciò che è lo stesso, un semplice arco.

Allo stato pregresso alla alterazione, stato A, può associarsi la coppia N, M entrambi riferiti all'asse mediano della sezione geometrica integralmente reagente: si supponga -per chiarezza d'esposizione- che a tale coppia la sezione risponda con un valore di tensioni di trazione massima inferiore a quella di rottura: dunque sezione integralmente reagente.

In presenza di una alterazione, dovuta ad una causa perturbatrice, misurata attraverso  $\Delta N$  e  $\Delta M$ , la sezione risponde fino ad un certo punto ancora in regime di sezione integra.

La risposta della sezione è dunque lineare, nel senso che a incrementi doppi di sollecitazione corrispondono esattamente incrementi doppi di livello tensionale e così via.

Al crescere ulteriore della causa perturbatrice, vi è di certo un momento, e sia stato B, a cui corrisponde un valore di trazione ormai intollerabile: si manifesta una apertura di lesione, con il che la sezione si parzializza, ne più ne meno come la normale sezione di c.a., ma con una differenza sostanziale.

Mentre nel c.a. il momento segna il passaggio delle trazioni dall'ormai inerte calcestruzzo alle provvide barre d'armatura, nella sezione di muratura questo scambio non c'è. Dunque ciò che sino ad un attimo prima (A-) era sopportato in trazione dalla fibra più tesa, viene a mancare: in termini di risultante delle compressioni sulla sezione, la  $R_{\text{compr}}$  viene a diminuire in valore assoluto, poiché il termine  $N$  resta lo stesso nel passaggio dallo stato A- allo stato A+ ; ma nel contempo il contributo al momento che nello stato A- era comunque esplicato dalla forza di trazione ora annientata, in virtù del suo braccio, deve essere bilanciato da un eguale aumento esplicato dalla risultante di compressione, che peraltro diminuisce in v.a. : non c'è altro da ammettere che nel passaggio dallo stato immediatamente pre-fessurato a quello fessurato successivo, la risultante delle compressioni debba aumentare il suo braccio, cioè spostandosi verso l'esterno, dal lato delle fibre compresse, aumentando di fatto il livello tensionale di massima compressione.

Da questa situazione in poi la risposta della sezione non può che essere non lineare: e difatti ad ogni aumento della azione, si verifica da un lato un approfondimento della zona ormai inerte, ed un sempre maggior accumulo di picco tensionale sul lato maggiormente compresso. È facile pensare ad un assetto in termini di  $\varepsilon$  che progressivamente e sempre più si inclina, con ovvie conseguenze in termini di deformabilità flessionale del concio a cavallo della sezione, con rotazioni che ormai divengono talmente ampie tanto da poter considerare la sezione come sede di una sezione plastica. A tutto c'è un limite, e precisamente quel valore a cui corrisponde l'attingimento nella fibra più compressa della  $\varepsilon$  che segna lo sgretolamento.

Vari sono i modelli numerici che simulano queste evoluzioni, ma ciò che preme sottolineare in questo momento è la differenza di comportamento fra la fase pre-fessurata e quella post-fessurata : linearità nel primo caso, non linearità sempre più marcata nel secondo.

E quindi chiaro che ove lo studio dovesse limitarsi alla individuazione delle sole fessurazioni, un modello di tipo lineare sarebbe senz'altro adeguato. Ma ove si voglia invece capire o giudicare sulla sicurezza complessiva della struttura, non può non portarsi in conto la parzializzazione progressiva delle varie sezioni. In questo modo, ripetendo lo stesso ragionamento, sarà possibile seguire le rispettive evoluzioni, fino a che per un numero sufficiente di sezioni non si siano attivate le cerniere plastiche : si è allo stato di incipiente collasso per formazione di un meccanismo.

## 1.5 L'approccio a doppio modello

Se è vero che la statica delle costruzioni voltate può essere ben descritta da un lato, per le fasi iniziali di carico fino alla prima fessurazione, con modelli consueti elastico-lineari, e se è anche vero che per la conoscenza dell'assetto di incipiente collasso possa guardarsi alla struttura come assemblaggio di elementi connessi in particolari sezioni, sede di formazione di cerniere plastiche, ebbene si affaccia l'idea di procedere con la cd. tecnica del doppio modello.

Da un lato il modello elastico-lineare, capace di riprodurre con precisione ciò che accade nella prima fase, e dall'altro –nella logica del *limit design*- o calcolo a rottura, procedere su sistemi in cui il moltiplicatore di incipiente collasso sia determinato in base al teorema fondamentale del calcolo a rottura [2].

Il moltiplicatore dei carichi  $s$  di collasso viene stabilito quale appartenente ad un intervallo, progressivamente sempre più restringibile al crescere del numero d'analisi parziali, e definito in basso dal più alto dei moltiplicatori staticamente ammissibili e in alto dal più basso dei moltiplicatori cinematicamente sufficienti, avendo definito come:

- moltiplicatore staticamente ammissibile dei carichi,  $\psi$ , tale che nella struttura isostatica ottenuta da quella originaria, soggetta alle forze  $\psi F$  e ad una arbitraria distribuzione di iperstatiche, sia possibile ritrovare, in ogni sezione, che le sollecitazioni restano contenute nei limiti di resistenza dei materiali;
- moltiplicatore cinematicamente sufficiente,  $\gamma$ , quel numero che vien fuori come coefficiente di sicurezza da una arbitraria distribuzione di cerniere plastiche

Va ricordato che con il calcolo a rottura le deformazioni elastiche nei tronchi intermedi vengono trascurate, ed inoltre assegnando capacità di deformazioni plastiche virtualmente infinite alle supposte sedi di localizzazione delle cerniere plastiche.

L'analisi del modello è ricondotta a quello di un sistema d'aste rigide connesse a due a due da cerniere plastiche (nella posizione stabilita per tentativo), ed ivi applicato il momento plastico, ricercando così per il tramite del Principio dei Lavori Virtuali, il moltiplicatore dei carichi cinematicamente sufficiente. Con questo valore di moltiplicatore dei carichi  $\gamma$ , è possibile poi stabilire, sezione per sezione, la distribuzione delle sollecitazioni, determinandone il relativo rapporto fra le stesse e quelle limiti, e sia  $\rho$ . Assunto il massimo dei  $\rho$  nelle varie sezioni, può mostrarsi che il fattore  $\gamma/\rho_{\max}$  sia un moltiplicatore staticamente ammissibile, e quindi porre un primo intervallo entro cui  $s$  è compreso:

$$\gamma/\rho_{\max} \leq s \leq \gamma$$

Va ricordato che nella procedura appena delineata possono ricomprendersi tutte le metodologie storiche, così come i calcoli delle spinte delle opere di sostegno con il masso spingente possono comunque farsi rientrare nel metodo del calcolo a rottura .

## 1.6 Il punto della situazione

Allo stato del ragionamento, i punti fissi ed ineludibili sono:

- un supporto numerico, basato su una teoria scientificamente robusta, è elemento essenziale di ogni determinazione ingegneristica, ancor più in ambito di ingegneria forense, e ciò indipendentemente dalla tipologia strutturale;
- la struttura voltata in muratura è una struttura resistente per forma, ma la forma stessa è variabile al variare del carico, poiché sempre maggiori zone di muratura ormai inerti vengono sottratte all'ufficio di resistere alle sollecitazioni che pervadono la volta;
- la risposta è ipotizzabile lineare fino alla apertura delle fessure, dopodiché il modello va profondamente cambiato, anche a favore di un approccio a rottura che traguardi alla sola resistenza ultima della compagine.

Dunque l'ipotesi di lavoro del doppio modello pare affrancare da ogni censura e per questo sembra irrinunciabile .

E tuttavia alcune considerazioni sono d'obbligo, in particolare rispetto alle criticità prevedibili:

- di per sé un doppio modello implica un onere sicuramente maggiore;
- mentre per la analisi lineare non vi sono praticamente limiti alle geometrie trattabili (doppia curvatura, intersezioni di volte, archi d'imposta, lunette,...) e alle interazioni con gli elementi vicini, nella pratica applicazione del calcolo a rottura si è nella necessità pratica di ricorrere a schemi il più possibile piani, previa estrazione degli stessi dall'insieme strutturale .
- per il calcolo a rottura va rilevata la difficoltà di accettare i risultati ottenuti, poiché basati sulla assunzione di materiale plastico indefinito, a fronte di valore di  $\varepsilon$  in compressione delle murature che si attesta sull'ordine del 3-4 per mille; la validazione definitiva richiede allora procedimenti specifici supplementari, basati su calcoli di strutture virtuali ottenute per congelamento, a rotazione, di ciascuna delle cerniere plastiche ottenute dal calcolo a rottura , Hodge, e relative estensioni di Locascio , [4].

## 1.7 L'analisi al passo

L'analisi elastica lineare e quella con calcolo a rottura sono riguardabili ciascuna come particolari lenti monofocali, con la prima capace di *far vedere* bene il comportamento iniziale nella fase pre-fessurata e la seconda a concentrarsi sull'assetto finale. Nel caso di una analisi elastica al passo, piuttosto che indossare due paia d'occhiali distinti, come accade nel doppio modello, se ne utilizza uno solo: focalizzando su uno o su un'altro si percorre l'intero ciclo evolutivo, e per di più con continuità (lenti a fuoco variabile).

Con l'analisi al passo la dicotomia si supera: con la stessa procedura e lo stesso modello vengono ottenuti inizialmente pari risultati di quelli ottenibili con una elastica lineare. Si segue al passo l'evoluzione del comportamento ed infine si appunta l'attenzione sull'approssimarsi della struttura al momento dell'incipiente collasso, ottenendo lo stesso moltiplicatore che si sarebbe ottenuto con un calcolo a rottura, e per di più con la possibilità di monitorare via via spostamenti e deformazioni (leggi: controllare l'ampiezza delle deformazioni, e se necessario limitare il moltiplicatore).

Le tecniche d'analisi disponibili sono varie perché varie sono le modalità d'approccio ad un fenomeno retto da un grafico curva-cedimento non lineare.

Ma in ogni caso la analisi al passo può essere così rappresentata in sequenza, prendendo inizialmente a riferimento una struttura molto semplice, e cioè quella a soli carichi assiali (si pensi ad una reticolare), senza particolari effetti legati ad instabilità biforcative (in questo caso il concetto di cerniera plastica va generalizzato, ovviamente, in senso di spostamenti assiali):

- si assegna al materiale una curva di comportamento  $\sigma - \varepsilon$  in monoassiale;
- si supponga di aver calcolato la struttura sino allo *step* precedente corrispondente ad un moltiplicatore  $\lambda_{i-1}$ ; si conoscono dunque tensioni e deformazioni nella struttura, spostamenti e quant'altro,....;
- per effetto di  $\Delta\lambda$ , la risposta tangente della struttura è definita, sezione per sezione, dai moduli elastici del materiale, variabili, che possono essere calcolati come moduli tangenti a partire dalla curva di comportamento  $\sigma - \varepsilon$  assegnata, in funzione del livello deformativo ottenuto al termine dello *step* precedente;
- l'analisi sotto lo *step*  $i$  viene effettuata ancora su una struttura elastico-lineare, ma con rigidzze aggiornate, sommando poi i risultati a quelli ottenuti dallo *step* precedente.

Il risultato ottenuto è molto espressivo, in quanto dà efficacemente conto della zona iniziale (andamento lineare), della riduzione progressiva dei moduli delle aste più impegnate, sino all'incipiente collasso, che si registra allorquando un numero sufficiente d'aste ( $n_{\text{iperstatiche}} + 1$ ) sia caratterizzato da valori francamente trascurabili della rigidezza tangente .

Tutte le considerazioni appena ricordate sono effettuabili con modalità diverse a seconda che il legame costitutivo del materiale sia elastico (per quanto non lineare) o elasto-plastico.

Nel primo caso la curva di comportamento  $\sigma - \varepsilon$  è rappresentativa, in linea generale, di un provino in monoassiale che pur non comportandosi in maniera lineare, mantiene comunque un legame biunivoco fra tensione e deformazione . Allo scarico dello stesso la curva segue esattamente lo stesso percorso della rampa di salita, stavolta al contrario, senza accusare alcun valore di deformazione residua allo scarico .

L'analisi quindi, procedendo al passo, non fa altro che tener conto che -nel passaggio dallo *step*  $i-1$  allo *step*  $i$ - la matrice di rigidezza si sia degradata, cioè debba essere scalata per un fattore riduttivo che tenga conto della riduzione del modulo  $E$  letta sulla curva in monoassiale .

Nel secondo caso, a cui corrisponde la mancanza del legame di biunivocità  $\sigma - \varepsilon$  (quali ad esempio i complessi legame di *softening*) le analisi richiedono conoscenze superiori sulla teoria dei solidi elasto-plastici , basate sulle tre leggi di base (snervamento, flusso e incrudimento) e su tecniche risolutive in controllo di spostamento, anziché in controllo di forze.

Nella ipotesi che i carichi siano crescenti in maniera monotona, e che comunque si possa ammettere che le deformazioni  $\varepsilon$  nel corpo siano crescenti in maniera monotona, può assumersi senz'altro che il materiale resti comunque elastico, pur se ampiamente *non Hooke*, ignorando i concetti propri della elasto-plasticità.

In altri termini ci si rifà ad un modello concettuale che vede la evoluzione strutturale come una successione di tanti stati incrementali, ciascuno di per sé tanto piccolo come ampiezza da essere riguardato come ad andamento lineare: cioè si sostituisce alla curva globale di comportamento una spezzata poligonale in cui il generico tratto è funzione della rigidezza che a quello *step* compete alla struttura in funzione del livello tensionale raggiunto.

Nel prosieguo di questo studio verrà costantemente mantenuta questa assunzione di base, incentrata sulla elasticità, per quanto non lineare, del materiale. Ciò non preclude affatto di considerare limiti alle tensioni massime, essendo sufficiente mantenere il percorso della

$\sigma - \varepsilon$  sufficientemente orizzontale dopo la  $\sigma$  di crisi . In termini più chiari se si è stabilito che  $\sigma_{\max}=10$  daN/cm<sup>2</sup>, occorre implementare una legge in monoassiale tale che dopo tale valore la curva sia “quasi” a  $\sigma$  costante (in realtà l’inclinazione sarà comunque inputata, pena la mancanza di corrispondenza biunivoca con  $\varepsilon$ ), ma francamente trascurabile, solo numerica, senza fisicità connessa. Altra cosa sarà il limite di controllo sulla  $\varepsilon_{\max}$  tollerabile, ottenuto monitorando costantemente al passo le  $\varepsilon$  stesse, e bloccando il percorso in corrispondenza dell’attingimento del valor max .

Ove alla struttura impegnata in carichi assiali si sostituisca quella in cui sia presente anche flessione, il ciclo concettuale non cambia: piuttosto che parlare di allungamenti delle aste in funzione del modulo tangente, si parlerà di  $\varepsilon$  delle fibre, o (in termini globali di sezione) di curvature in funzione del modulo tangente.

E dunque per elementi trave, per i quali ciascuna fibra viene vista microstruttura in monoassiale, non si registrano particolari difficoltà concettuali .

Per elementi in cui lo stato non sia monoassiale, dovranno assumersi particolari condizioni di equivalenza fra il generico stato tensionale e quello monoassiale di riferimento , ma di questo si dirà oltre .

## 1.8 La procedura proposta

In base a tutte le considerazioni sinora svolte, si è posto come elemento caratterizzante l’intero studio il seguente quesito:

*“E’ possibile, in pratica tecnica, predisporre ed analizzare modelli che diano conto della evoluzione al passo dell’assetto statico di volte in muratura, avvalendosi di codici consolidati ? “*

precisandosi che il modello debba necessariamente :

- dar conto della diversità di comportamento a trazione e compressione del materiale muratura ;
- dare la possibilità di modellare, con tecniche ormai comuni, anche geometrie particolari (tutt’affatto che rare);
- essere stabile nella soluzione ;
- permettere di monitorare, attraverso un controllo al passo, le deformazioni a compressione della muratura, in modo da bloccare la soluzione per valori eccedenti la  $\varepsilon$  di sgretolamento della stessa ;



- consentire di individuare, con sufficiente semplicità, l'andamento delle inevitabili lesioni che segnano il passaggio fra la fase pre-fessurata e quella fessurata;
- essere in grado di evidenziare le zone maggiormente stressate, in modo da poter applicare le tecniche d'intervento più opportune di consolidamento, testandole e modificandole, al passo. Non può infatti ignorarsi che in ambito di Ingegneria Forense può essere affidato al Consulente o al Perito l'ulteriore onere di assicurare le strutture residue al Dissesto ovvero quello di formulare scenari di refusione di danni civile, basando le relative determinazioni su progetti di consolidamento.

In ogni caso la procedura deve essere in grado :

- di assicurare che i valori di trazione restituiti siano, oltre che ovviamente non superiori a quelli massimi implementati nella legge di comportamento, anche tali da non fornire particolari contributi statici alla sezione . In altri termini, se leggera resistenza a trazione deve esserci nella monoassiale (per assicurare buona stabilità alla soluzione numerica) occorre che essa non porti a contributi particolarmente significativi ;
- di garantire che alla crisi nel punto sia associabile ad un criterio particolarmente robusto per le strutture in muratura, Rankine (o della max tensione principale) .

ed accettando che:

- i valori di trazione, pur se innescata la crisi per tensione massima di trazione, restino costanti, senza riazzerarsi come la fragilità imporrebbe .

In altri termini si vuole verificare la fattibilità operativa (si ribadisce, in pratica tecnica) dell'affrontare l'analisi con un codice che permetta una analisi al passo su materiale (non iso resistente) implementato mediante la sua curva  $\sigma - \varepsilon$  in monoassiale, e sanando questa ipotesi a posteriori , e ci si riferisce alla compressione, mediante una mappatura al passo delle deformazioni principali (minime) .

Il programma posto è francamente ambizioso, ma gli elementi raccolti in passato nella professione, e gli ulteriori approfondimenti che questo lavoro ha richiesto, paiono dare confortanti indicazioni.

Quindi :

- supporto di una procedura “guidata”, comprensiva dei necessari *check* ;
- utilizzo , come strumento di base, di un codice sufficientemente diffuso in ambito professionale ed accademico, Straus7 (Strand7 fuori Europa) della G+D Computing, Sidney .

## **1.9 Le applicazioni**

Il percorso tracciato è stato applicato a quattro casi di studio , dei quali i primi tre relativi alla analisi di una volta a botte, ed il quarto ad una volta a vela :

- volta a botte
- volta a botte a cui sia applicato un consolidamento con frenelli in muratura ;
- volta a botte a cui sia applicato un consolidamento con fasce in FRP ;
- volta a vela

Un apposito capitolo è dedicato ad un confronto fra le risultanze di una indagine, numerica e sperimentale in piccola scala, svolta presso la Università di Cassino su archi in muratura , ri-analizzati con la procedura proposta .

## 2. LA VOLTA A BOTTE

### 2.1 Aspetti generali

#### 2.1.1. La geometria

La sottostruttura oggetto di analisi è costituita da una ideale porzione di fabbricato costituita da murature d'imposta su cui scarica una volta a botte. Le murature d'ambito delineano perimetralmente l'ambiente, con spessore differenziato fra le due tipologie di pareti (imposta reggispinta e timpani, rispettivamente 80 e 60 cm) .

La sagoma della direttrice, in foggia d'ellisse, presenta rispetto al proprio piano medio un'asse orizzontale di 4.30m, una freccia di 1.12m ed uno sviluppo di 5.44m ; la volta presenta spessore costante di 20cm .

#### 2.1.2. I materiali

In coerenza con le disposizioni normative ad oggi vigenti, NTC 08, per LC1, si è provveduto ad una classificazione meccanica delle murature procedendo in base a “verifiche in situ-limitate”, desumendo i parametri meccanici da tabelle di riferimento, ed in particolare da quelle contenute nella Circolare 617/08 .

Più in dettaglio, utilizzando la tab. C.8.A.2.1 , con i correttivi speciali di cui alla tab. C.8.A.2.2 , si è proceduto assumendo (come specificato al p.to C.8.A.1.1), per le resistenze medie i valori minimi dell'intervallo e per le rigidezze medie i valori centrali dell'intervallo .

*“muratura formata da elementi naturali in tufo, generalmente squadrati a mano anche se a tratti in modo rozzo, di pezzatura di circa 40cm\*30cm\*20cm (spessore), allettati con malta pozzolanica, in spessore di comenti conformi alla regola d'arte (spessori non superiori al cm) “.*

Si attribuisce alla 4° tipologia, “muratura a conci di pietra tenera (tufo,...)” :

resistenza media a compressione

$$f_m=14 \text{ daN/cm}^2$$

resistenza media a taglio senza compressione

$$\tau_o=0.28 \text{ daN/cm}^2$$

modulo E non fessurato

$$=10800 \text{ daN/cm}^2$$

modulo G non fessurato

$$=3600 \text{ daN/cm}^2$$

peso sp.  $\gamma=1600 \text{ daN/mc}$ , riportato a  $1800 \text{ daN/mc}$  sulla base di valori ottenuti dallo scriventi su edifici con tipologia simile.

*elementi migliorativi:*

malta di buone caratteristiche: coefficiente 1.50 da applicarsi a  $f_m$ ,  $\tau_0$  e ai moduli E e G

giunti sottili: coefficiente 1.50, da applicarsi a  $f_m$ , a  $\tau_0$  (solo per metà), e ai moduli E e G.

*valori di calcolo per analisi a carichi verticali*

Per analisi a carichi verticali si assume  $FC=1.35 \quad \gamma_m=3$  :

resistenza a compressione  $f_d = 14 \cdot (1+0.50+0.50) / (1.35 \cdot 3) = 6.9 \text{ daN/cm}^2$

resistenza a taglio senza comp.  $\tau_{o,d} = 0.28 \cdot (1+0.50+0.25) / (1.35 \cdot 3) = 0.1 \text{ daN/cm}^2$

modulo E legg. fessurato  $= 75\% \cdot 10800 \cdot (1+0.50+0.50) = 16\,200 \text{ daN/cm}^2$

modulo G legg. fessurato  $= 75\% \cdot 3600 \cdot (1+0.50+0.50) = 5\,400 \text{ daN/cm}^2$

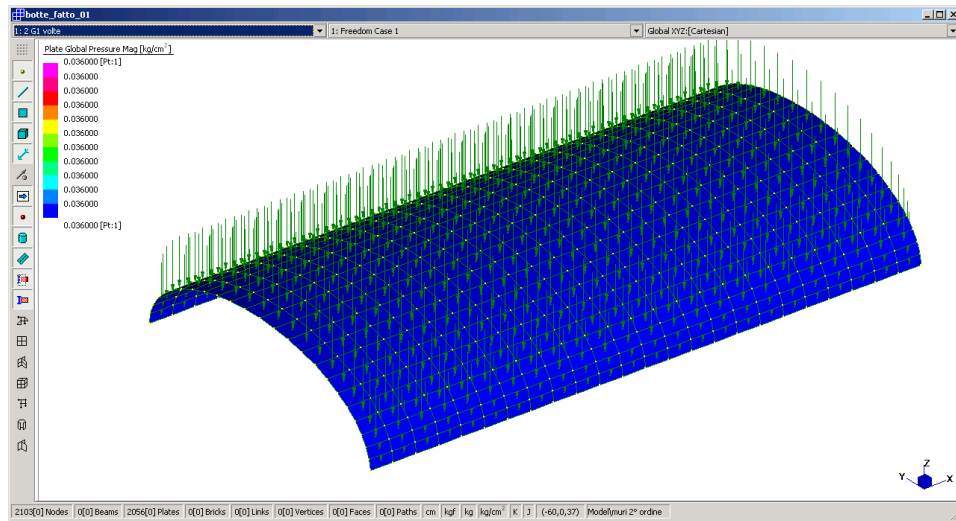
### 2.1.3. I carichi

Le condizioni elementari di carico agenti sulla struttura sono così individuate:

$$G_{1\text{volte}} \quad G_{2\text{volte}} \quad Q_{\text{volte,totale}} \quad Q_{\text{volte,parziale}}$$

precisandosi che le azioni connesse alle azione da peso proprio dei muri non hanno rilevanza nella analisi di cui al presente capitolo, poiché in esso le murature perimetrali sono trattate in costanza di comportamento indefinitamente lineare per meccanica .

Il carico  $G_{1\text{volte}}$  afferisce al peso proprio della volta, che per spessore di 20cm, risulta essere pari a  $1800 \cdot 0.20 = 360 \text{ daN/m}^2$ :



ed ammette una risultante pari a  $5.44\text{m} \cdot 0.20\text{m} \cdot 8.40\text{m} \cdot 1800\text{daN/mc} = 16450 \text{ daN}$  .

Il carico  $G_{2\text{volte}}$  afferisce alla somma delle seguenti aliquote:

*quota variabile*

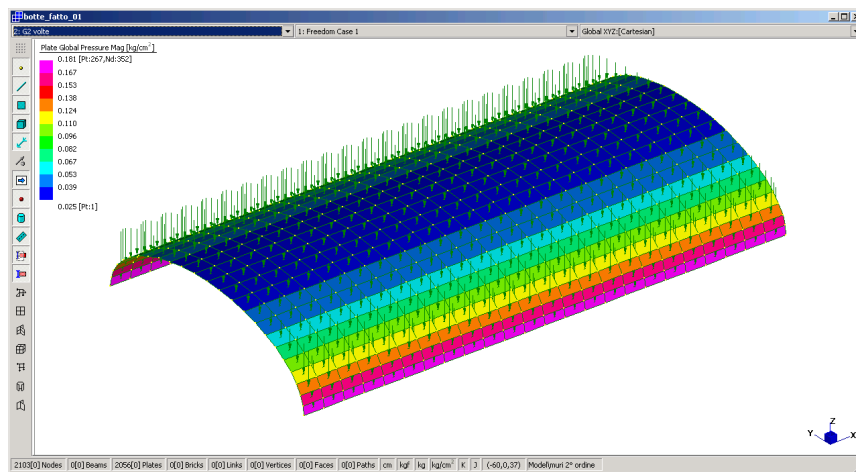
peso del ricoprimento in materiale di risulta, di altezza variabile, valutato con  $\gamma_{\text{ricopr}} = 1500 \text{ daN/mc}$

*quota costante*

pavimentazione in ceramica	20 daN/mq
massetto di allettamento in calce s=3cm	70
intonaco intradosso	30
aliquota tramezzi	120

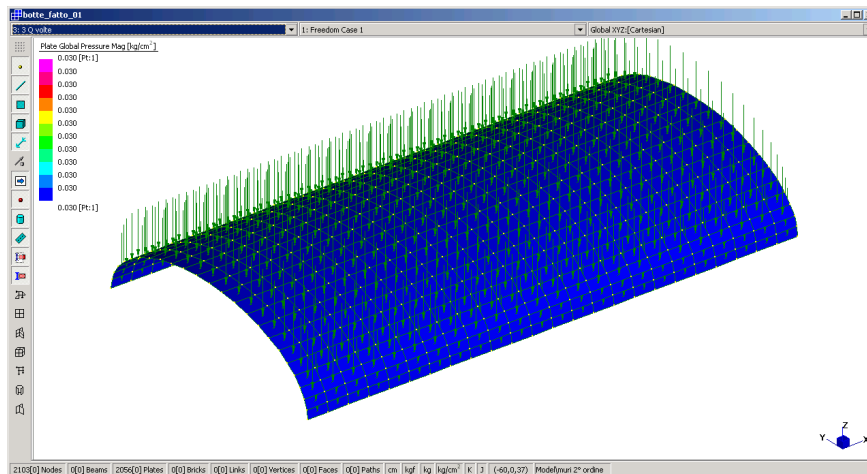
-----  
240 daN/mq

In termini meramente puntuali sia ha alla chiave  $p=240\text{daN/mq}$ , mentre alle imposte ( $h_{\text{ricopr}}=1.12\text{m}$ ) si ha  $p=1920\text{ daN/mq}$  : nella applicazione pratica il carico viene applicato tenendo conto della altezza di ricoprimento nel centroide del singolo *plate* :



ed ammette una risultante pari a 22840 daN .

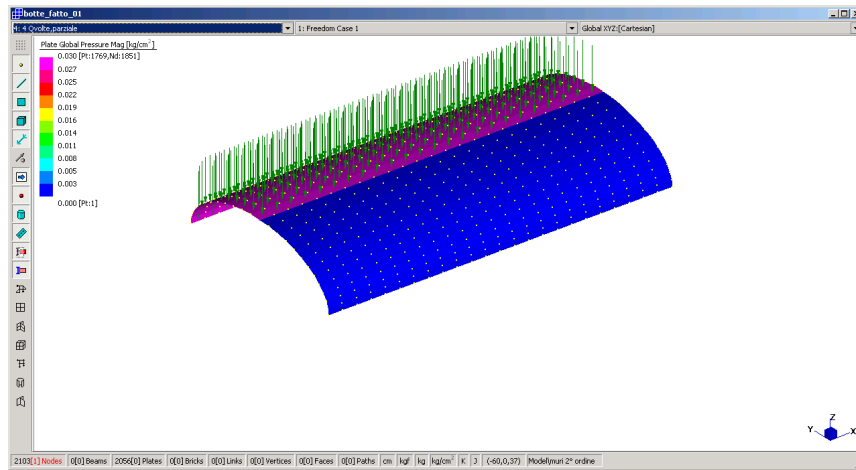
Il carico  $Q_{\text{volte,totale}}$  afferisce al carico d'esercizio , assunto pari a  $p=300\text{ daN/mq}$  , presente su tutta la volta:



ed ammette una risultante  $4.50\text{m} \times 8.40\text{m} \times 300\text{daN/mq} = 11340\text{ daN}$  .

Una considerazione sulla entità della risultante a pieno carico : esso si attesta su  $(16450+22840+11340)=50630\text{ daN}$ , che sulla superficie di riferimento  $(4.50 \times 8.40=37.8\text{mq})$  , equivale ad un carico unitario medio di  $1340\text{ daN/mq}$ .

Prima di passare alle analisi vere e proprie si illustra un'ultima condizione elementare ,  $Q_{volte,parziale}$  che afferisce al carico d'esercizio (sempre  $p=300$  daN/mq), ma applicato soltanto a  $\frac{1}{2}$  volta :



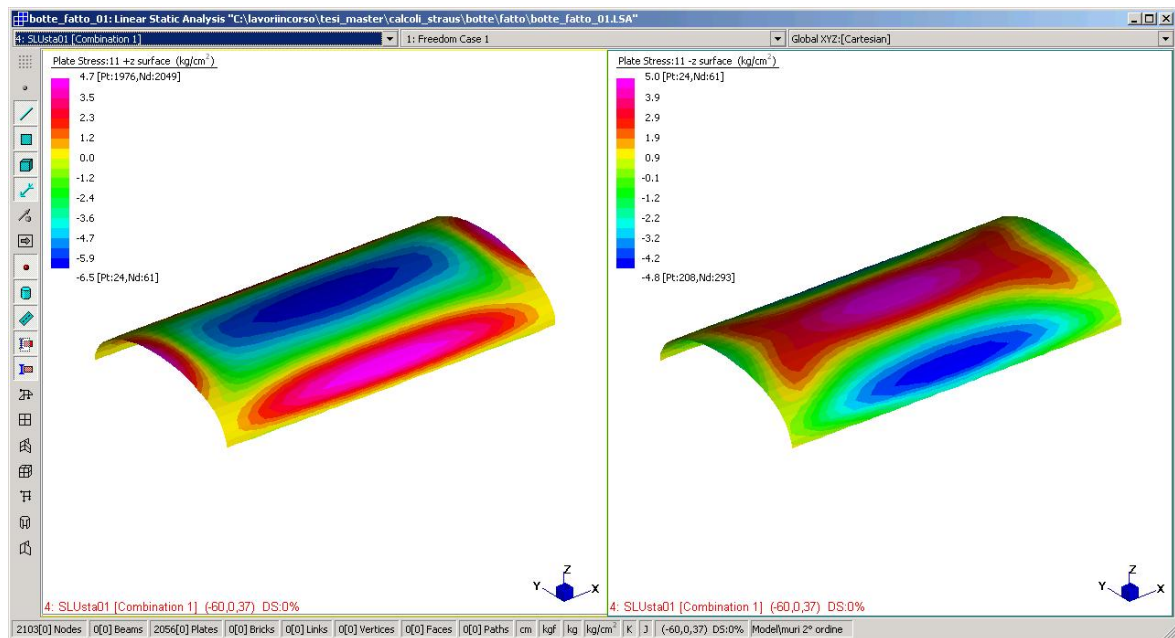
ed ammette una risultante  $2.25m \cdot 8.40m \cdot 300daN/mq = 5670$  daN .

## 2.2 L'analisi lineare

La prima combinazione di riferimento allo SLU è rappresentata da :

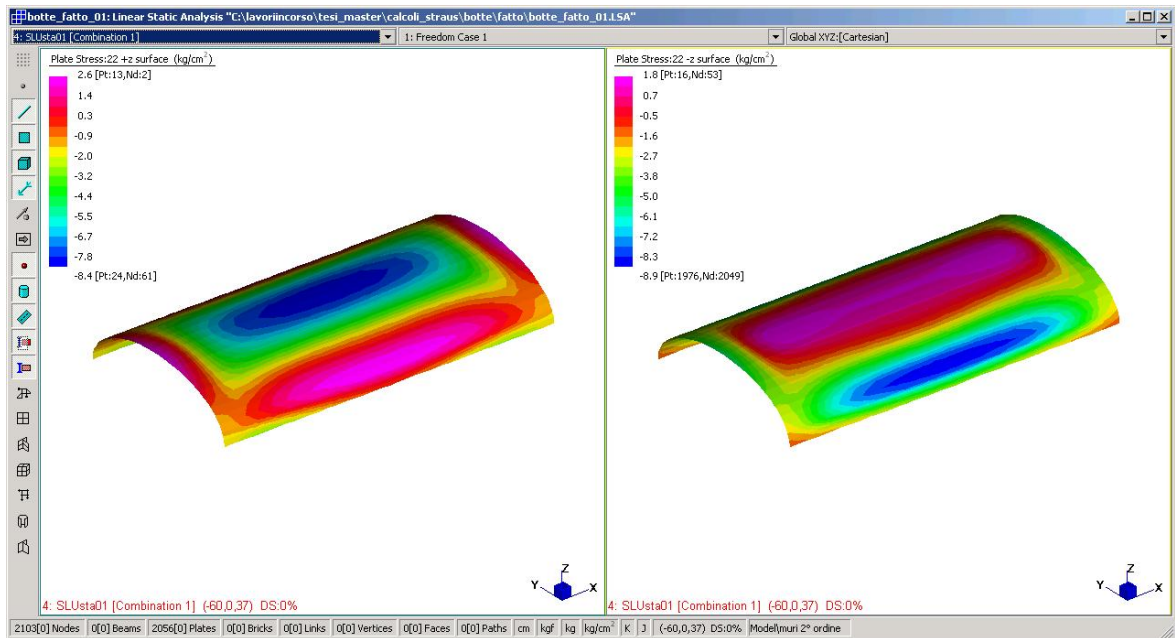
$$SLUsta01 \quad 1.30 \cdot G_{1volte} + 1.50 \cdot G_{2volte} + 1.50 \cdot Q_{volte,totale}$$

Le tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



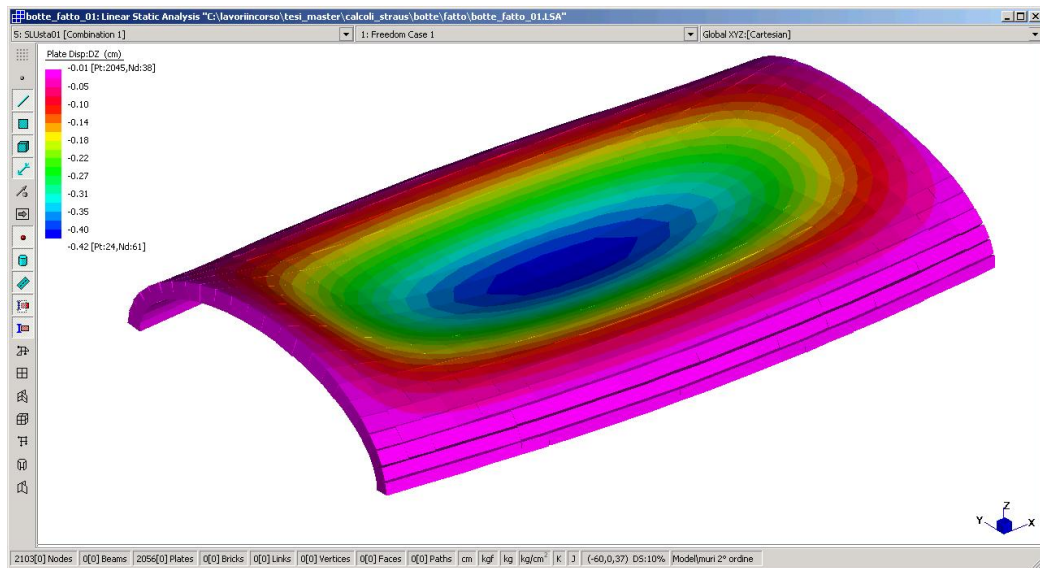
con picco assoluto di trazione di 5.0 daN/cm<sup>2</sup> (in chiave) , solo di poco superiore a quello alle imposte (4.7daN/cm<sup>2</sup>).

Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con picco assoluto di compressione di 8.90 daN/cm<sup>2</sup> (alle imposte) , solo di poco superiore a quello in chiave (8.4daN/cm<sup>2</sup>).

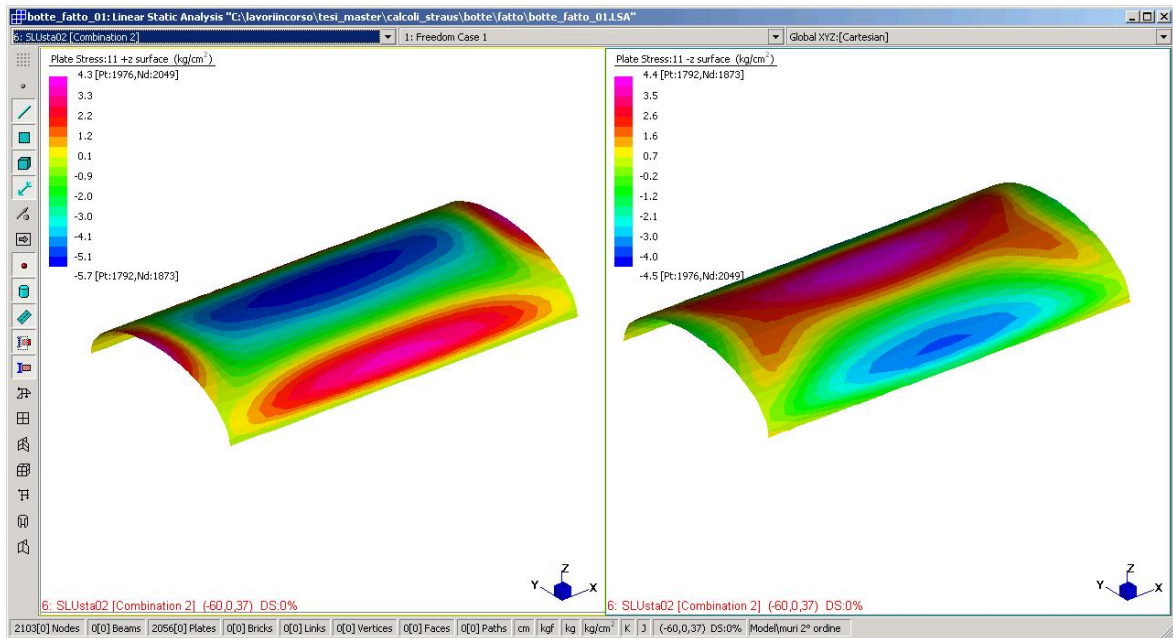
In ordine agli spostamenti nella medesima combinazione, è possibile riportare la seguente mappatura :



Volendo investigare sul ruolo del carico d'esercizio non simmetrico, si considera la :

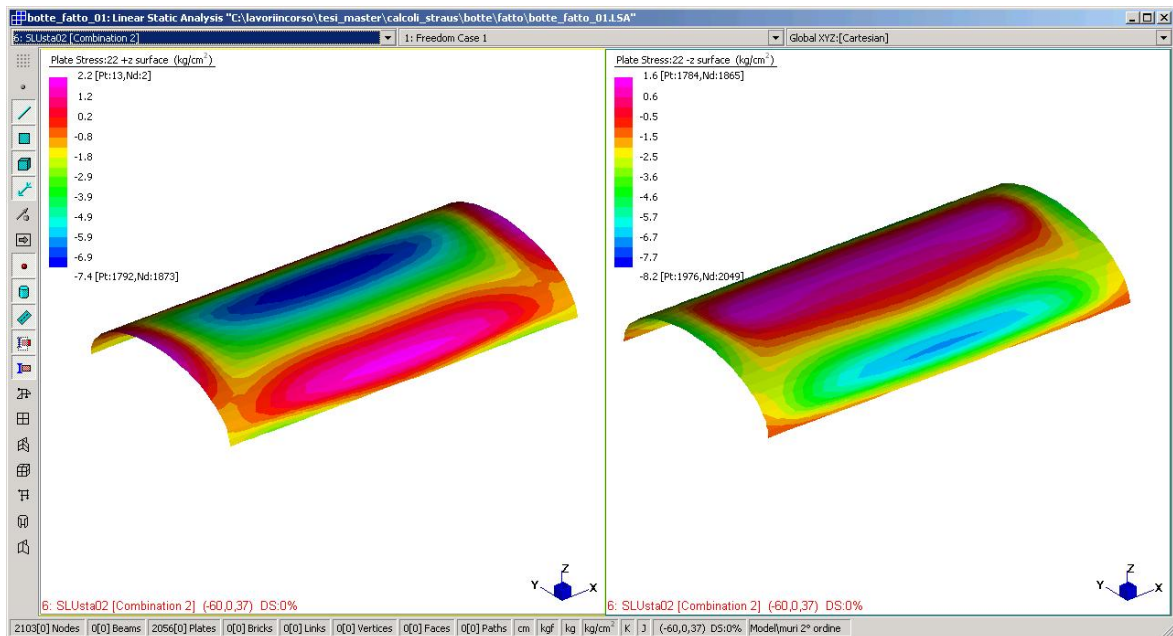
$$SLUsta02 \quad 1.30 \cdot G_{1volte} + 1.50 \cdot G_{2volte} + 1.50 \cdot Q_{volte, parziale}$$

Le tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con picco assoluto di trazione di 4.4 daN/cm<sup>q</sup> (in chiave) , solo di poco superiore a quello alle imposte (4.3aN/cm<sup>q</sup>).

Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con picco assoluto di compressione di 8.2 daN/cm<sup>q</sup> (alle imposte) , solo di poco superiore a quello in chiave (7.4daN/cm<sup>q</sup>).

Dal confronto con i risultati ottenuti nella SLUsta01 risulta che nel caso in specie la distribuzione di carichi su metà volta dà effetti compressivi costantemente non superiori a quelli ottenuti con distribuzione totale : la ragione è legata alla entità dei carichi Q che non riescono a spostare –in misura significativa- la risultante delle pressioni dettata in modo molto marcato, dai carichi  $G_1$  e soprattutto  $G_2$  .



## 2.3 L'analisi in non linearità meccanica

### 2.3.1. Criteri ed assunzioni

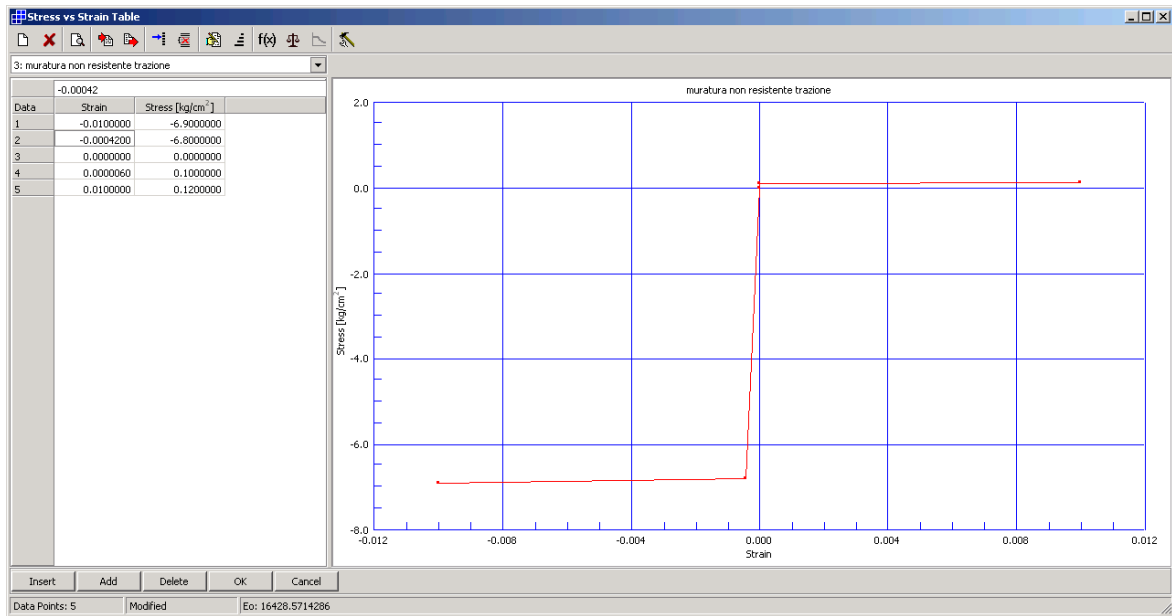
Nell'ambito della procedura delineata al Cap.1 , si è predisposta una analisi non lineare per meccanica, attestata sui seguenti elementi di riferimento.

Il criterio di crisi assunto, tenuto conto della specificità di comportamento della muratura, è quello del max stress o di Rankine. In esso, come è noto, si postula la crisi nel generico stato triassiale quando :

- la massima tensione principale
- la minima tensioni principale

raggiunge un valore specifico del materiale, desunto dalla curva in monoassiale, derivante in linea di principio da prove .

In ordine alla monoassiale di riferimento, tenendo presente la caratterizzazione del materiale *muratura* costituente la volta, già riportata in precedenza, si è potuta stabilire l'andamento della stessa :



La tabella è caratterizzata dai seguenti elementi:

#### campo di compressione

Il primo tratto è ad andamento lineare fra l'origine ed il punto di ginocchio [6.80daN/cm<sup>2</sup>;0.00042] con modulo pari a  $E=16200$  daN/cm<sup>2</sup>, così come da caratterizzazione. Segue un tratto ancora lineare e sostanzialmente orizzontale (inclinato di quel tanto che basta per assicurare univocità di legame fra  $\sigma$  ed  $\varepsilon$ ); il tratto prosegue fino ad un valore di  $\varepsilon$  pari al 10per mille, ben superiore al limite pratico, ma va in tal senso

ricordato che in ogni caso il codice non effettua controllo automatico sulle  $\varepsilon$ , indipendentemente dal valor massimo inputato, poiché l'andamento è in ogni caso assunto dal codice stesso sempre indefinito (se necessario prolungando in continuità l'ultimo tratto di spezzata).

campo in trazione

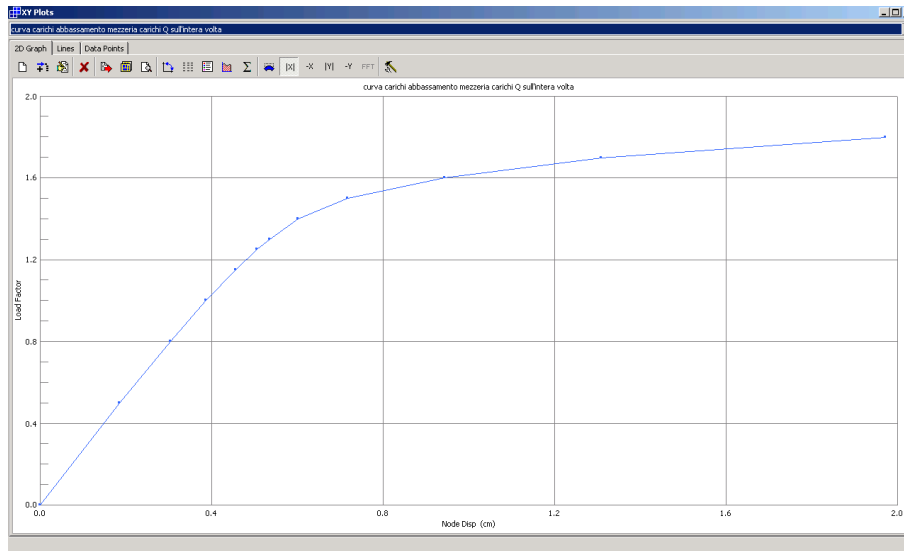
Anche in questo caso due tratti di spezzata: il primo dall'origine sino a [0.10daN/cm<sup>2</sup>;0.000006] con modulo pari a E=16200 daN/cm<sup>2</sup>, così come da caratterizzazione. Il secondo, sostanzialmente orizzontale, per il quale valgono le stesse considerazioni prima svolte in termini di assunzione automatica di comportamento sempre indefinito.

**2.3.2. Sviluppo**

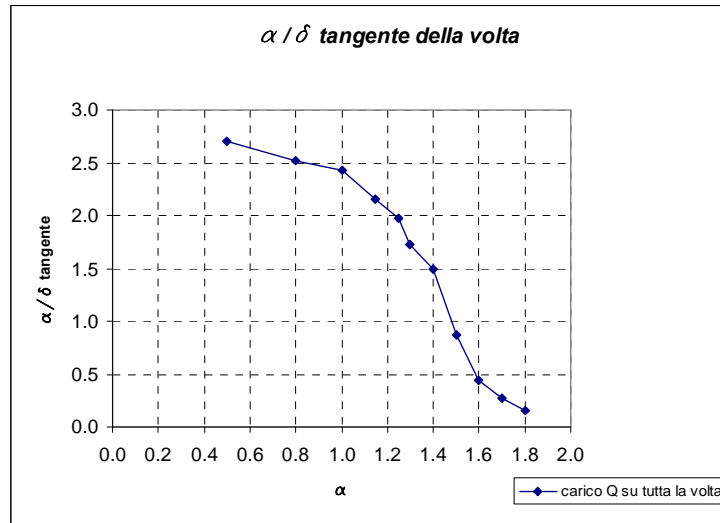
La analisi è svolta, in prima istanza, facendo crescere in maniera proporzionale, i seguenti carichi :

$$G_{1\text{volte}} \quad G_{2\text{volte}} \quad Q_{\text{volte,totale}}$$

Appuntando l'attenzione sul nodo di chiave della direttrice mediana (in pratica sul punto proiettato delle intersezioni delle due diagonali in pianta) è possibile monitorare l'andamento carico-abbassamento dello stesso al crescere del moltiplicatore dei carichi (unico per tutti) :



Dagli stessi risultati appena ottenuti è possibile mostrarne una espressiva elaborazione in termini di rigidezza tangente (a meno del valore di forza):



Ignorando in prima istanza le limitazione sulla  $\varepsilon$  in compressione della muratura, il moltiplicatore di collasso si assesta intorno a valori di circa 1.8 . In realtà per questo valore gli spostamenti sono notevoli, ed è facile prevedere che la limitazione sulla deformazione massima tenderà ad abbassare il valore appena trovato, nel senso che la deformazione massima sostenibile si sviluppa prima che il meccanismo si sia formato.

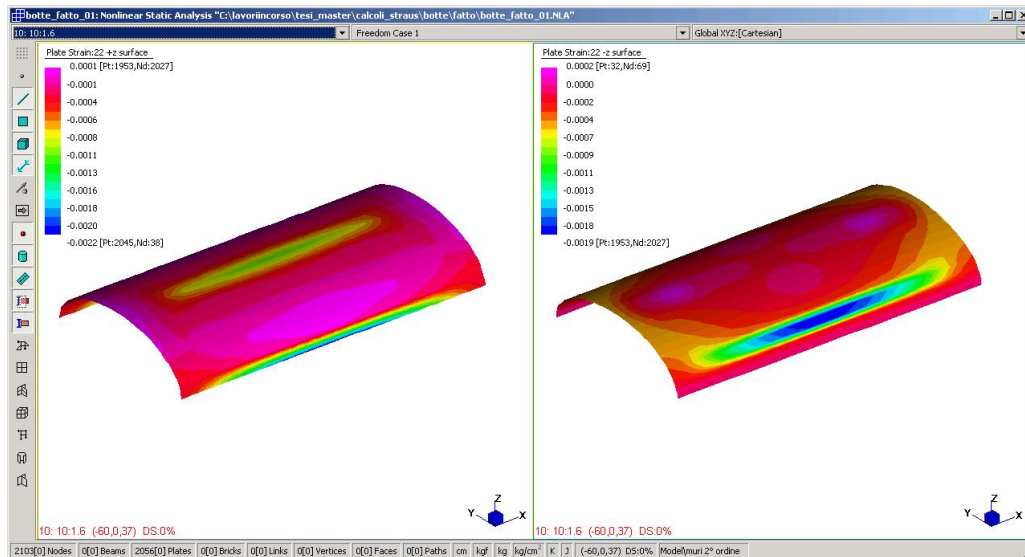
### 2.3.3. Controllo sulle $\varepsilon$

Il calcolo al passo, così come predisposto, riesce a seguire l'assetto strutturale nelle varie fasi di impegno progressivo delle varie zone di muratura, cogliendo in particolare l'attingimento della resistenza di calcolo a compressione  $f_d$ , che solo formalmente continua a crescere per effetto della leggerissima inclinazione della curva in monoassiale .

E tuttavia, come già ampiamente anticipato in più d'una occasione, nella procedura automatica non vi è alcun controllo sulla entità degli spostamenti e soprattutto delle deformazioni che interessano la muratura. In altri termini per poter validare i risultati dell'analisi *step by step*, occorre monitorare, in esterna (come meri osservatori) la  $\varepsilon$ , e bloccare la curva di crescita carico-spostamento allorquando la  $\varepsilon$  assuma un valor massimo, rappresentativo dell'inizio dello sgretolamento a compressione.

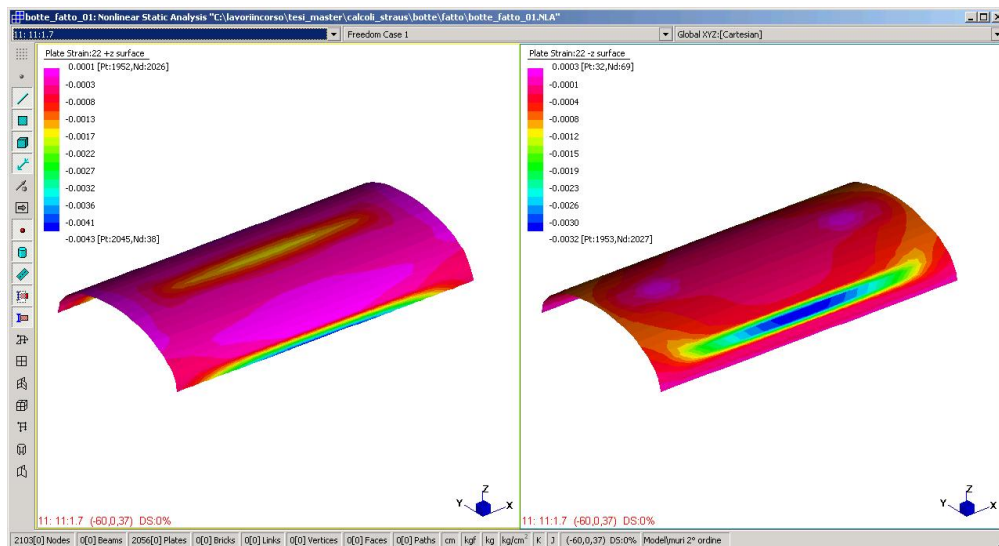
Come limite in  $\varepsilon$  a compressione si utilizza il valore 0.0035, così come proposto in NTC 08, 7.8.3.2.1 (con riferimento alle murature armate , ma certamente estendibile anche al caso di murature semplici).

Ebbene, tanto assunto, si riporta la mappatura delle  $\varepsilon$  in compressione all'estradosso (a sx) e all'intradosso (a dx) per lo step  $\alpha=1.6$ , provvisoriamente assunto come valore di collasso:



evidenziandosi un valore max pari al 2.2 per mille, inferiore al limite.

In presenza di un moltiplicatore dei carichi appena superiore, e sia  $\alpha=1.7$  (ed ancor più il valore 1.8 desunto dall'analisi senza limitazione sulle  $\varepsilon$ ), la situazione muta decisamente, con superamento della  $\varepsilon_{\max}$ , in corrispondenza dell'attacco dell'imposta e alle reni :



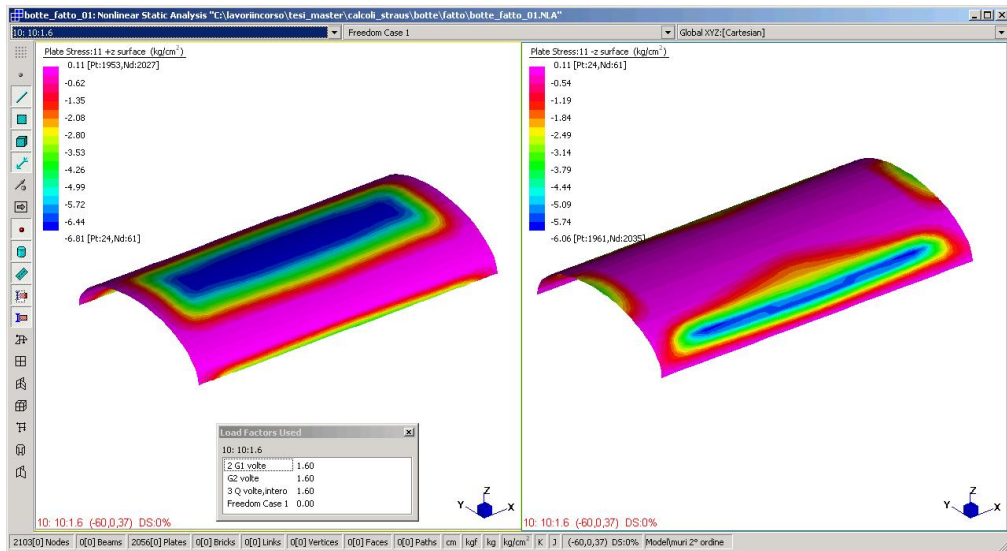
Ne deriva allora che la curva sia da bloccarsi in corrispondenza di  $\alpha_{\text{coll}}=1.60$  ; dunque nel caso in esame il limite sulla  $\varepsilon_{\max}$  ha eroso il valore del moltiplicatore che si sarebbe ottenuto nell'ipotesi di indefinita capacità di allungamento delle fibre.

In termini ancor più chiari, se si fosse utilizzato il solo calcolo a rottura, senza alcun controllo sugli spostamenti [Hodge, Locascio] si sarebbe stimato in eccesso il carico di collasso, e quindi a svantaggio di sicurezza, e precisamente nella misura da 1.60 a 1.80, cioè di quasi il 15% in più.

### 2.3.4. L'assetto limite

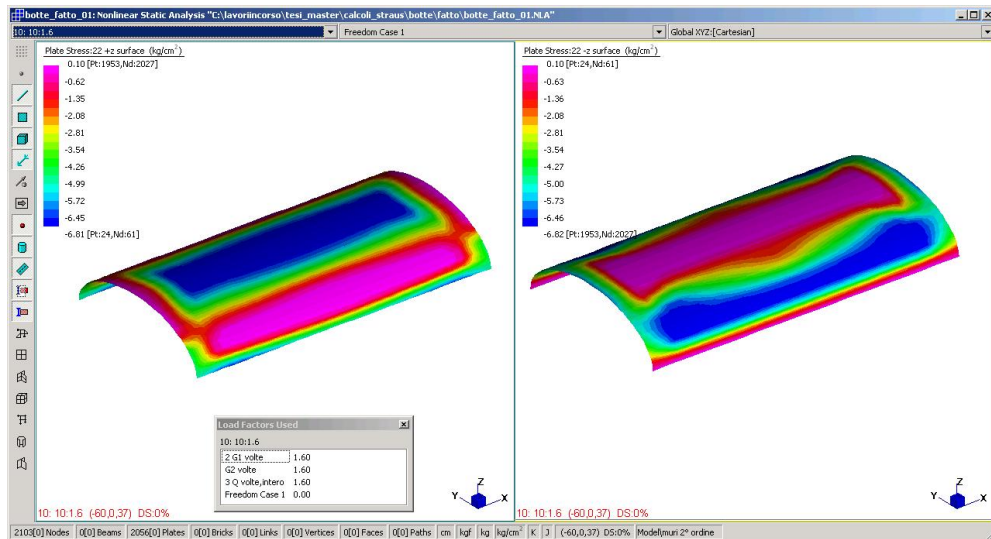
Considerando che a pieno carico ( $\alpha=1.00$ ) il carico medio è pari a 1340 daN/mq, può stabilirsi che al collasso esso diviene  $1340 \cdot 1.60 = 2140$  daN/mq .

Assumendo lo *step* ad  $\alpha = 1.6$ , è possibile evidenziare la distribuzione delle tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , (a sx estradosso, a dx intradosso):



da cui risulta l'ampia zona alle reni in estradosso e in chiave all'intradosso con picco di trazione che ha quasi raggiunto il limite di 0.12 daN/cm<sup>2</sup> .

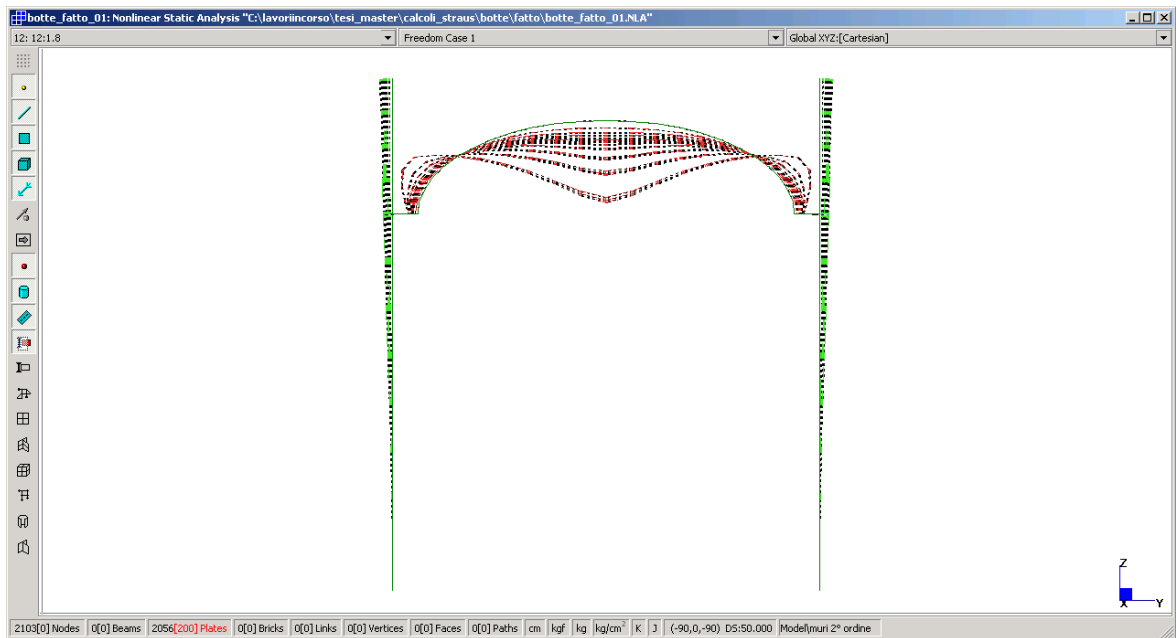
Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



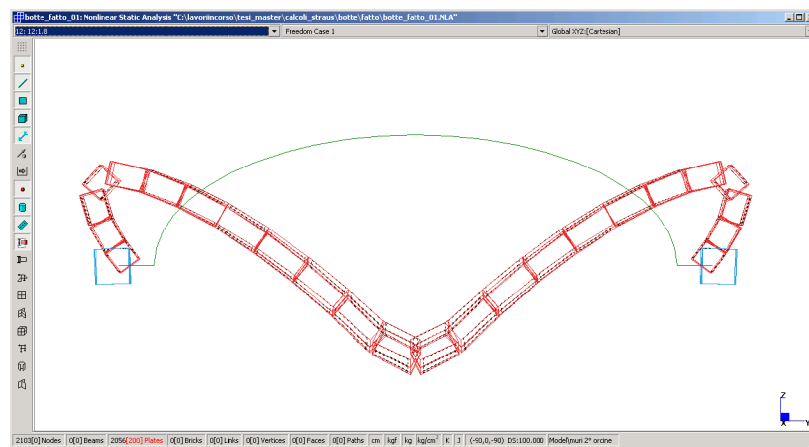
con l'ampia zona in chiave all'estradosso e alle reni in intradosso , a tensione di compressione molto prossima al limite di 6.90 daN/cm<sup>2</sup> .

Appare interessante indagare sull'assetto progressivo che la volta assume al crescere del carico. Si appunta l'attenzione sulla fascia mediana della volta, considerando anche i due

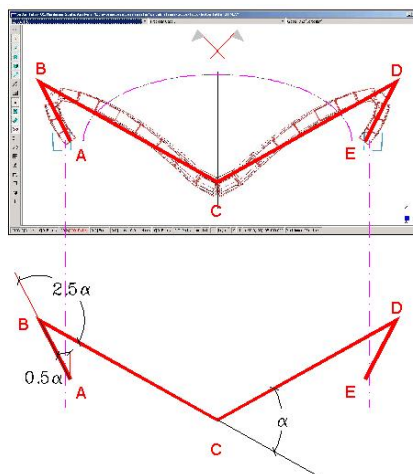
piedritti (dei quali si ricorda viene portata in conto la sola deformabilità flessionale indefinitamente elastica) :



e più in dettaglio allo step di incipiente collasso ( $\alpha=1.8$ ) che ovviamente è espressivo dell'incipiente collasso (senza riduzione per  $\varepsilon_{max}$ ):



che così può essere schematizzata:



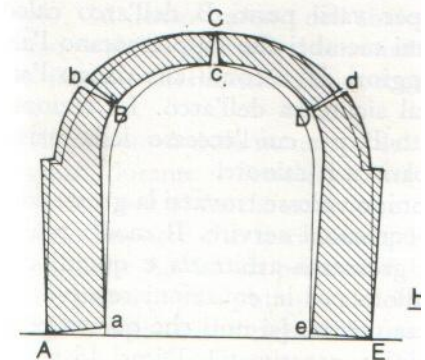
E' possibile notare che:

- le due imposte tendano ad allontanarsi (come ovvio che sia);
- nella zona delle reni l'arco tende ad innalzarsi , creando due distorsioni angolari pronunciate, l'una (A) all'attacco con le imposte e l'altra (B) più verso le reni ;
- in chiave si forma l'ulteriore cerniera plastica (C) , che insieme alle 2+2 (simmetriche) prima individuate danno luogo al meccanismo “a pentagono” .
- posta unitaria la distorsione angolare in C all'atto di incipiente collasso, quella in B assume valori pari a circa 2.5 , a denotare una forte dislocazione fra i cigli opposti della lesione ormai ampiamente aperta.
- le due cerniere alle reni (A, D) si verificano in corrispondenza di un angolo orizzontale misurato dall'imposta pari a quasi 15° .

Va rilevato inoltre che, per l'aver considerato i due piedritti indefinitamente elastici, e quindi sede di sole deformazioni elastiche, per l'instaurarsi del meccanismo l'arco deve trovare “al suo interno” un sufficiente numero di cerniere plastiche, che nel caso in specie è 5 attesa la simmetria del sistema .

Ed in queste considerazioni si trova riscontro dalla analisi del meccanismo piedritto-arco dell'Abate Mascheroni (4).

Confrontando i due meccanismi, emerge chiara da un lato la differenza sulla posizione delle cerniere A ed E, che nel caso bibliografico si pongono alla base del piedritto, e dall'altro la forte similitudine dei sistemi .



## 2.4 E le fessurazioni?

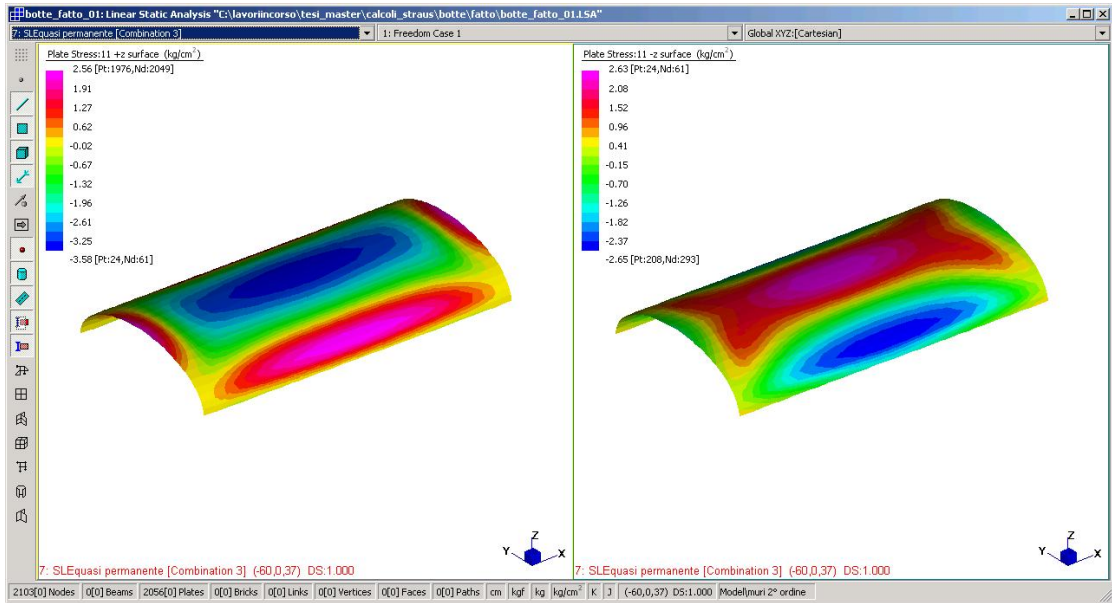
Più volte si è ricordato come la formazione di fessure in sé nella volta non sia elemento assolutamente sufficiente per esprimere un giudizio infausto sulla statica della stessa, e di ciò se ne darà di seguito una immediata dimostrazione .

Per intanto appare concettualmente logico assumere, come limite di trazione, non il valore di calcolo ottenuto in sede di caratterizzazione (giustamente affetto dal coefficiente  $\gamma_m$ ) ma un valore pieno, nominale , e cioè'  $f_{vko} * \gamma_m = 0.1 * 3 = 0.30$  daN/cm<sup>2</sup> .

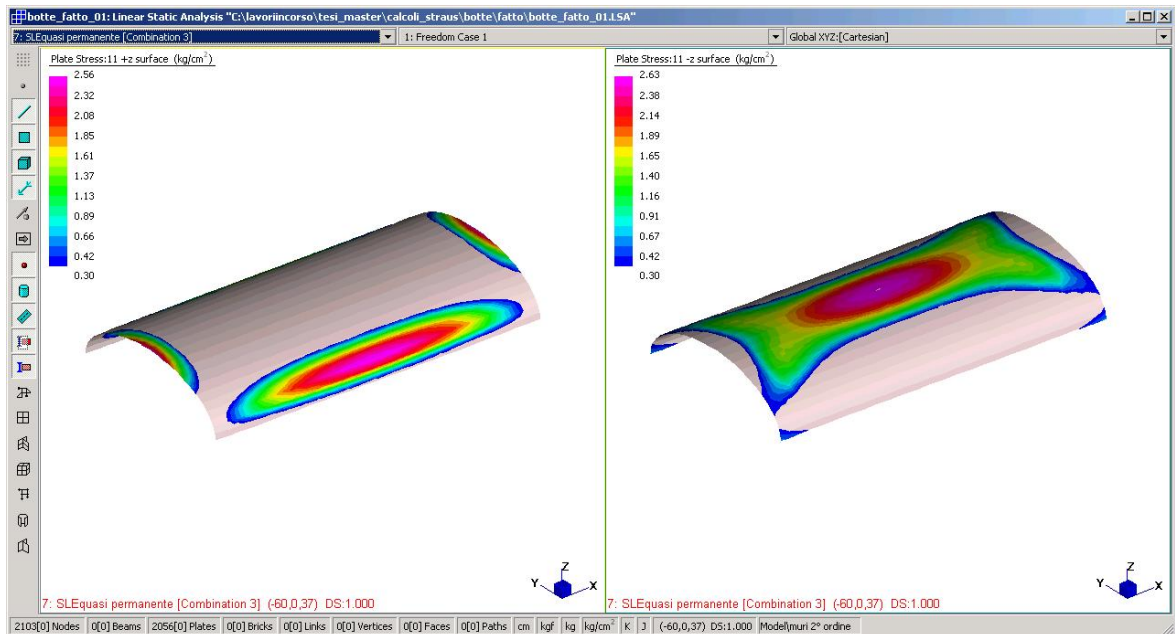
Ed allora due sono le strade: o rilanciare la non lineare con nuova curva in monoassiale che tenga conto del modificato valore di resistenza a trazione, o -più semplicemente- riprendere i risultati della lineare, ed in particolare assumendo la comb.

$$SLE \text{ q.p.} \quad 1.00 \cdot G_{1\text{volte}} + 1.00 \cdot G_{2\text{volte}} + 0.30 \cdot Q_{\text{volte}}$$

Un primo elemento di giudizio è legato alla mappatura delle tensioni principali di trazione  $\sigma_{11}$  (a sx l'estradosso, a dx l'intradosso):



seguito dalle zone in cui il valore di trazione supera quello nominale (0.3 daN/cm<sup>2</sup>):

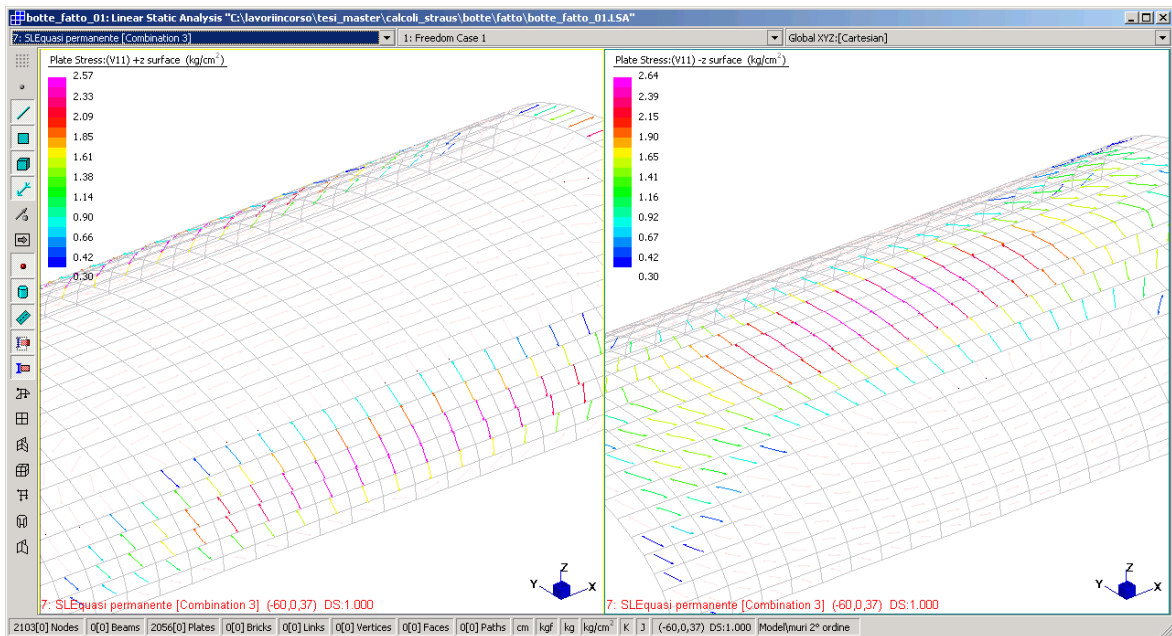


da cui è possibile ricavare che all'estradosso il livello massimo si attinge e (nel modello lineare si supera ampiamente) alle reni e –in piena dualità- all'intradosso nella zona centrale, in chiave.

E chiaro altresì che i risultati possono essere considerati validi solo nella misura in cui forniscono il primo formarsi della fessurazione, poiché da questo momento in poi le fessurazioni stesse inducono un comportamento progressivamente sempre più non lineare



: dettagliando le isostatiche di trazione, è possibile formarsi una idea piu' esplicita delle linee di originaria frattura (sempre a sx all'estradosso e a dx all'intradosso):



In conclusione la procedura messa a punto permette di :

- evidenziare come nel caso in specie le fessurazioni siano ampiamente presenti già in fase di combinazione quasi permanente e che l'apparire delle stesse è da considerarsi ampiamente anticipato rispetto a quelli che sono risultati essere i valori di moltiplicatore ultimo della struttura ;
- individuare le zone in cui si manifesta la originaria rottura;
- poter giungere alla definizione, ove necessaria, delle direzione di propagazione delle stesse, grazie alla possibilità di costruire funzioni più sofisticate delle tensioni principali (ad esempio  $\sigma_{id1}$  e  $\sigma_{id2}$ ), mappandole in regime di isodinamiche (di massimo e di minimo) e disponendo dell'andamento dei vettori (cioè costruendo le isostatiche di massimo e quelle di minimo) .

### 3. LA VOLTA A BOTTE CONSOLIDATA CON FRENELLI

#### 3.1 Aspetti generali

L'intervento sulla volta esistente si materializza principalmente attraverso la costruzione dei cd. frenelli, formati da elementi murari disposti parallelamente all'arco direttore, con intradosso curvo posto all'estradosso della volta (preventivamente privata di ogni rinfiacco) ed estradosso a quota leggermente inferiore a quella di orizzontamento.

I frenelli, formati da blocchi semipieni in laterizio, a fori verticali, risultano connessi a taglio alla sottostante volta mediante chiodature armate, sigillate per iniezione nella zona di penetrazione nella volta, e ammorsate nei frenelli grazie al riempimento dei fori verticali dei blocchi che risultano interessati dalle chiodature stesse.

Sui frenelli, disposti ad interasse opportuno, viene disposto un sistema piano, locale, di assorbimento dei carichi, un tempo in forma di tavellonato e soletta ed oggi, piu' semplicemente, in forma di una lamiera in acciaio autoportante, successivamente colmata nelle onde mediante argilla espansa, ed infine colmata superiormente da una soletta in c.c. armata a rete . è opportuno che in testa ai frenelli sia eseguito un piccolo cordoletto sommitale, in modo da accogliere efficacemente anche la rete metallica disposta nella soletta .

#### 3.2 Il modello modificato

##### 3.2.1. La geometria

I frenelli sono modellati come elementi *plate*, di spessore 25cm, con congiungente dei nodi superiori posta a 10cm al disopra dell'estradosso in chiave della volta vera e propria .

All'estradosso dei frenelli il cordoletto 25\*10 in c.c. , armato con 2f12 filanti, è simulato come elemento reagente a solo sforzo assiale, tipo *cutoff*, con valore di trazione max pari a  $2 \cdot 1.13 \cdot 3826 = 8650$  daN, e valore di compressione calcolato su una resistenza fd ridotta a compressione e pari a 50daN/cm<sup>2</sup>: si ha dunque un limite alla forza di compressione pari a  $25 \cdot 10 \cdot 50 = 12500$  daN. Si osserva che il cordoletto, filante sui frenelli, non è stato attestato nei muri di imposta, in coerenza con la difficoltà operativa di garantire una buona connessione in esecuzione. Il problema della connessione dei frenelli alle murature d'imposta, che di fatto è solo monolatero a compressione, è in pratica risolto direttamente in considerazione che gli stessi frenelli, in materiale laterizio, non possono subire trazioni particolari, dato il legame alla Rankine per essi assunti.

A simulare la connessione fra volta e frenelli , con chiodatura verticale, ammorsata nei fori verticali dei laterizi, si è considerata la coincidenza fra i nodi della volta e quelli dei frenelli (congruenza piena su tutte le componenti generalizzate di spostamento) .

### 3.2.2. I materiali

I frenelli sono previsti con muratura laterizia semipiena, a fori verticali, di spessore 25cm, e rapporto di foratura 45% , con elementi a fori verticali di dimensioni 25(spessore)\*30\*19(h) e giunto verticale ad incastro, realizzati con controllo di produzione di classe 2 (cfr. tab. 4.5.II di /N1.1/) , risultando quindi  $\gamma_m=3.0$ . La resistenza caratteristica a compressione dei blocchi è pari o superiore a  $f_{bk}=100\text{daN/cm}^2$  .La malta è del tipo M10

Dalla tab. 11.10.V di NTC 08 risulta che  $f_k=53.0 \text{ daN/cm}^2$

Dalla tab. 11.10.VII di NTC 08 risulta che  $f_{vk0}=2.0 \text{ daN/cm}^2$

peso sp.  $\gamma=1000 \text{ daN/m}^3$ , tenendo conto del peso dei blocchi, dei cementi in malta e dei bulbi di ancoraggio delle chiodature

*valori di calcolo per analisi a carichi verticali*

resistenza a compressione  $f_d= 53.0/3.00 = 17.7 \text{ daN/cm}^2$

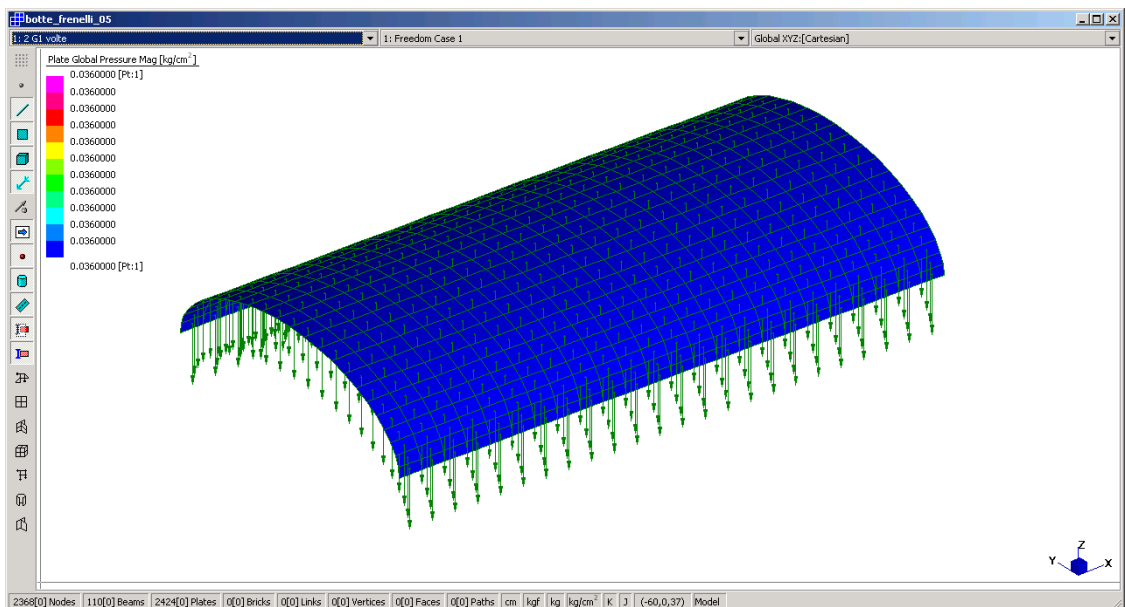
resistenza a taglio senza comp.  $\tau_{o,d}= 2.0/3.00 = 0.67 \text{ daN/cm}^2$

modulo E  $1000*f_k=53000 \text{ daN/cm}^2$

modulo G  $0.4*E=0.4*53000=21200 \text{ daN/cm}^2$

### 3.2.3. I carichi

La condizione elementare  $G_{1\text{volte}}$  è immutata rispetto alla volta non consolidata.



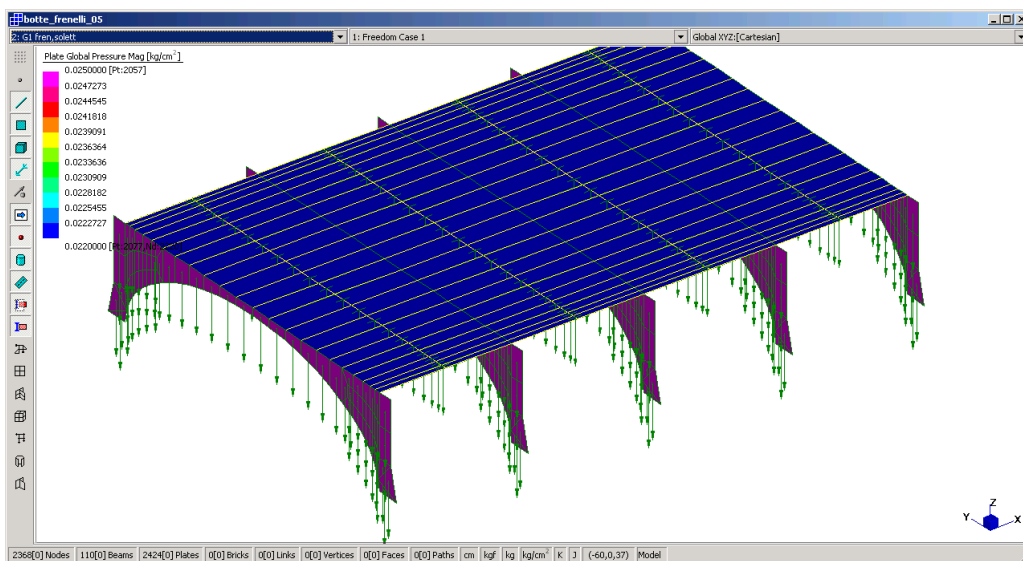
ed ammette una risultante pari a  $5.44m \cdot 0.20m \cdot 8.40m \cdot 1800daN/mc = 16450 daN$ .

Viene introdotta un'altra c.e.,  $G_{1fren,solett}$  a rappresentare il peso dei frenelli e delle solette di calpestio fra i frenelli, simulata mediante caricamento dei *patch*.

Per il primo si ha  $p = 1000 \cdot 0.25 = 250daN/mq$ , implementato mediante un carico distribuito sugli elementi rappresentativi dei frenelli.

Per il secondo si ha :

lamiera grecata tipo EGB 501R da 0.7mm	9 daN/mq
riempimento onde in argilla espansa	
$[(0.04 \cdot 0.053 \cdot 1.00) \cdot 600daN/mc] \cdot 1.00 / 0.162 =$	10 daN/mq
soletta in c.c.a. da 4cm	100 daN/mq
	-----
<b>G1</b>	<b>220 daN/mq</b>

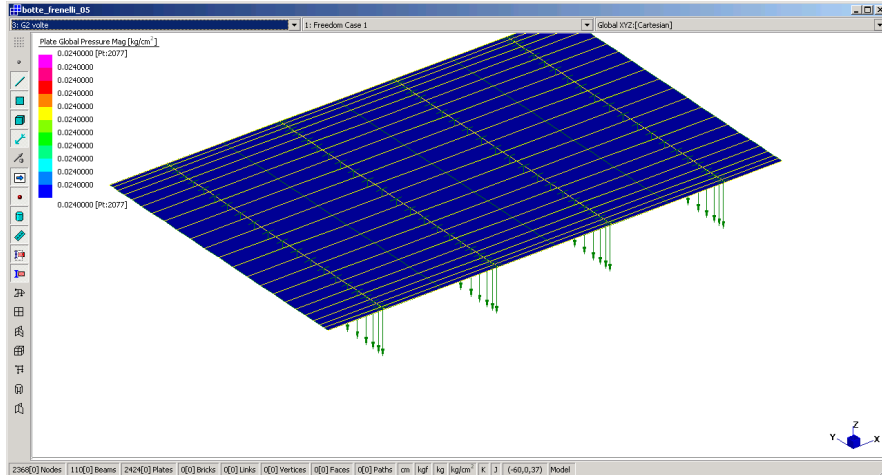


ed ammette una risultante pari a :

frenelli	$5 \cdot (2.04mq \cdot 0.25m \cdot 1000daN/mc)$	2550 daN
solette	$31.50mq \cdot 220daN/mq$	6930
	-----	
	<b>R</b>	<b>9480 daN</b>

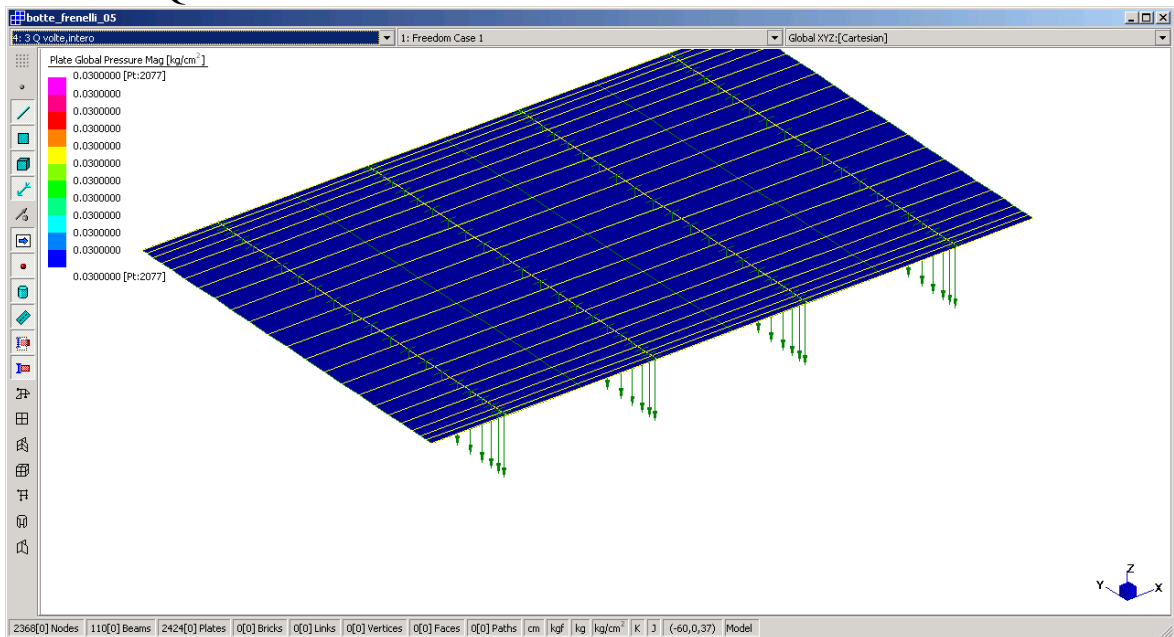
Nella condizione  $G_{2volte}$  vanno considerati i seguenti pesi:

pavimentazione in ceramica	20 daN/mq
massetto di allettamento in calce $s=3cm$	70
intonaco intradosso	30
aliquota tramezzi	120
	-----
	240 daN/mq



con risultante pari a  $31.50\text{mq} \cdot 240\text{daN/mq} = 7560 \text{ daN}$

Ed infine la Q :



con risultante pari a  $31.50\text{mq} \cdot 300\text{daN/mq} = 9450 \text{ daN}$

### 3.2.4. La riduzione complessiva dei carichi

Una considerazione, particolarmente opportuna, è da riservarsi al valore complessivo dei carichi a seguito dell'intervento : la risultante a pieno carico vale 42940 daN, a fronte della risultante a pieno carico per la volta non consolidata pari a 50630 daN , con una riduzione del valore pari al 15% circa .

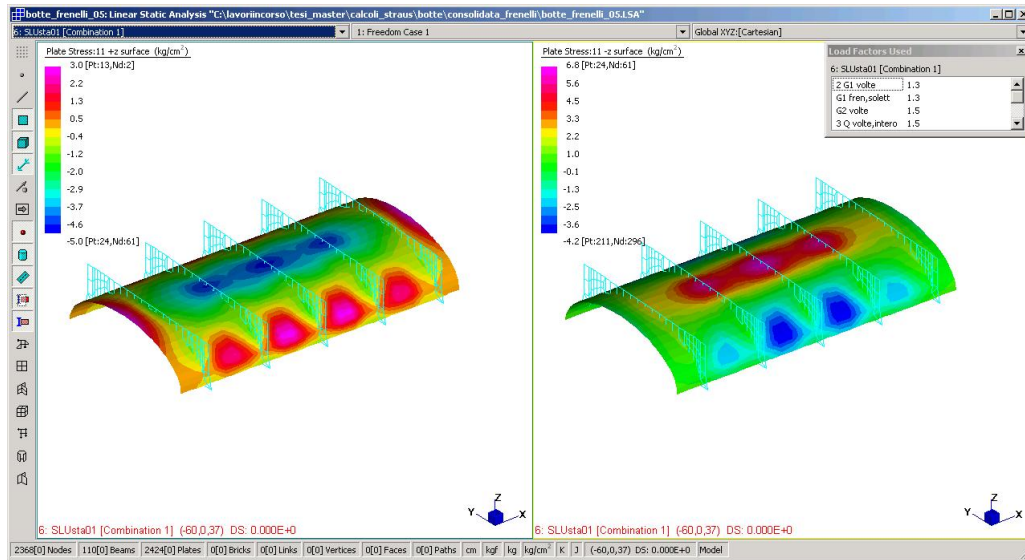
In termini di carico unitario medio si passa dall'originario 1340 daN/mq a 1135 daN/mq .

## 3.3 L'analisi lineare

La prima combinazione di riferimento allo SLU è rappresentata da :

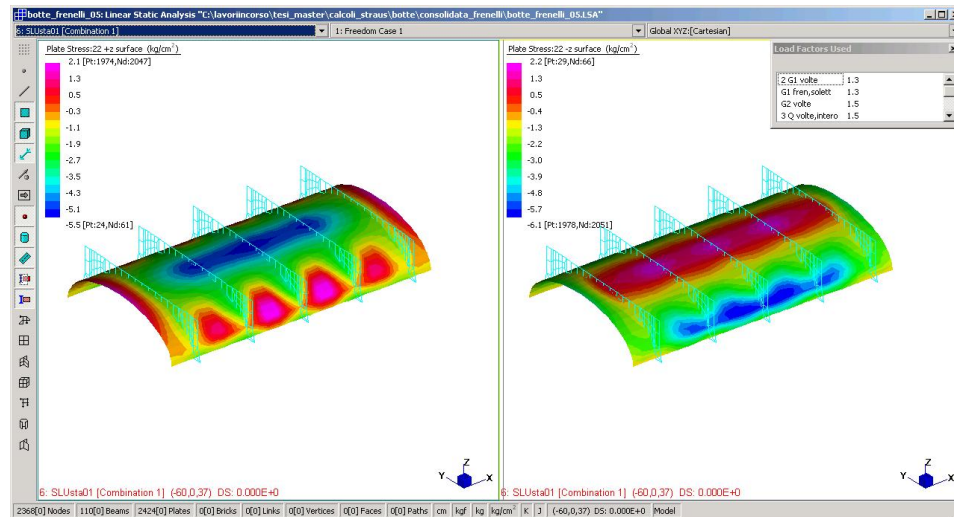
$$SLU1 \quad 1.30*(G_{1volte}+G_{1fren,solet}) + 1.50*G_{2volte}+1.50*Q_{volte,totale}$$

Le tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con picco assoluto di trazione di 6.8 daN/cm<sup>2</sup>, in corrispondenza della zona di chiave sottostante il frenello centrale.

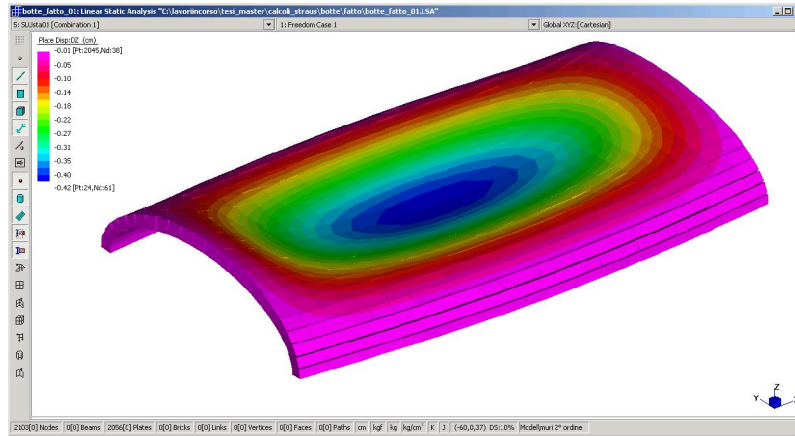
Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



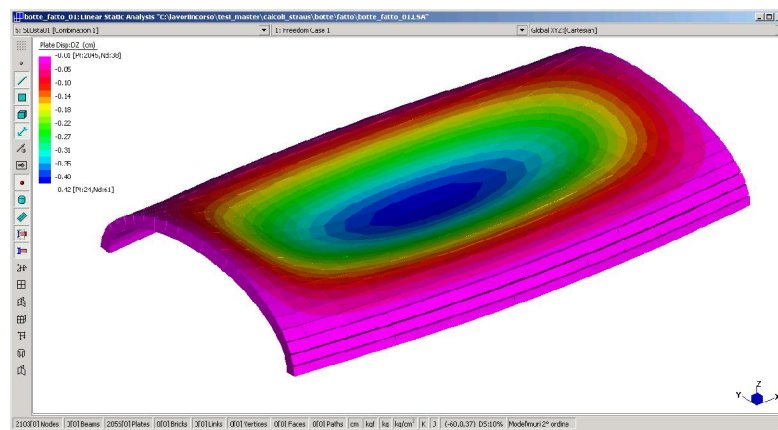
con picco assoluto di compressione di 6.1 daN/cm<sup>2</sup> (alle reni).

Dal confronto con i risultati ottenuti per la volta non consolidata, risulta che l'applicazione dei frenelli induce –nella analisi lineare- una riduzione nelle tensioni di compressione massima (da 8.9 a 6.1daN/cm<sup>2</sup>), accompagnata però da un contestuale aumento delle trazioni da 5 a 6.8daN/cm<sup>2</sup>.

In ordine agli spostamenti nella medesima combinazione, che nella volta non consolidata assumevano l'aspetto già presentato:



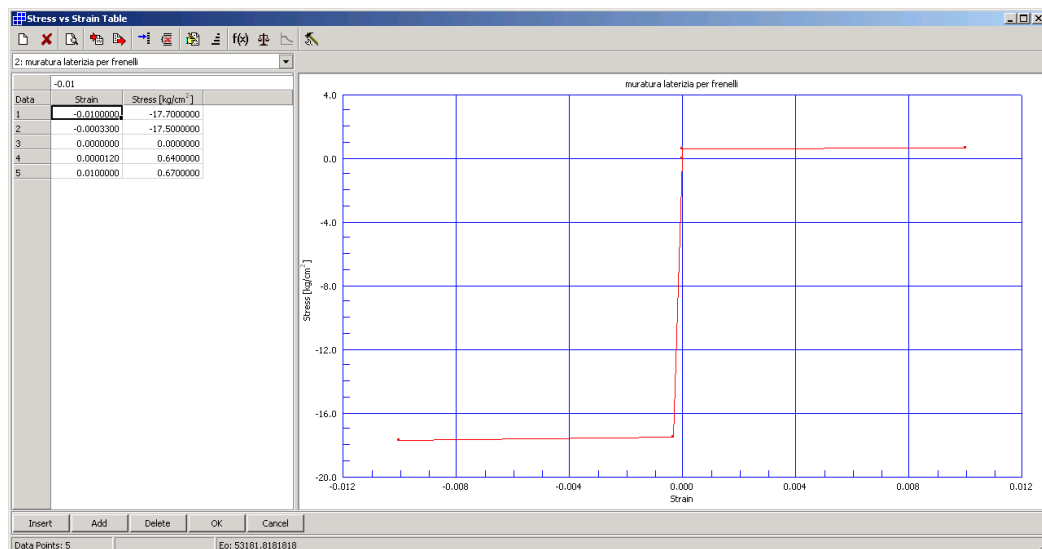
nella volta con frenelli emerge la notevole azione di irrigidimento compressivo operato dai frenelli:



### 3.4 L'analisi in non linearità meccanica

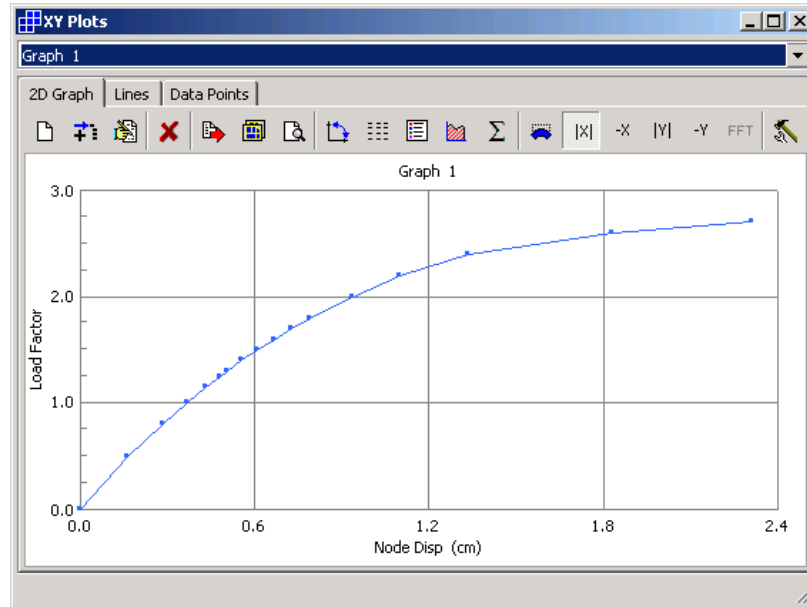
#### 3.4.1. Sviluppi

In costanza di altri parametri, ai frenelli è stata attribuita la seguente curva di comportamento in monoassiale :

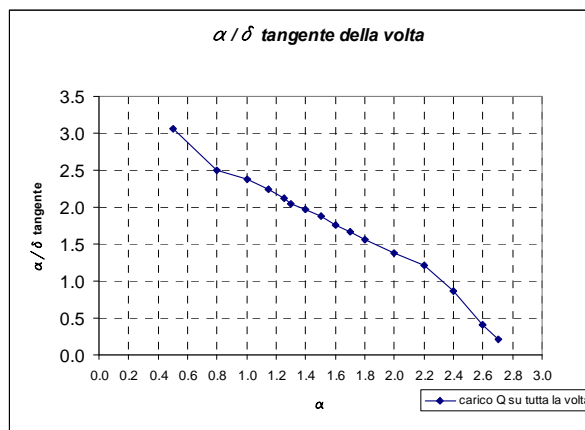


costruita con la stessa tecnica a suo tempo utilizzata per la caratterizzazione del comportamento monoassiale della muratura, con le ovvie modifiche numeriche reative ai valori di calcolo  $f_d = 17.7 \text{ daN/cm}^2$  e  $f_{v,k0} = 0.64 \text{ daN/cm}^2$

Appuntando l'attenzione sul nodo di chiave della direttrice mediana (in pratica sul punto proiettato delle intersezioni delle due diagonali in pianta) è possibile monitorare l'andamento carico-abbassamento dello stesso al crescere del moltiplicatore dei carichi (unico per tutti) :



Anche in questo caso è possibile mostrarne una espressiva elaborazione in termini di rigidezza tangente (a meno del valore di forza):



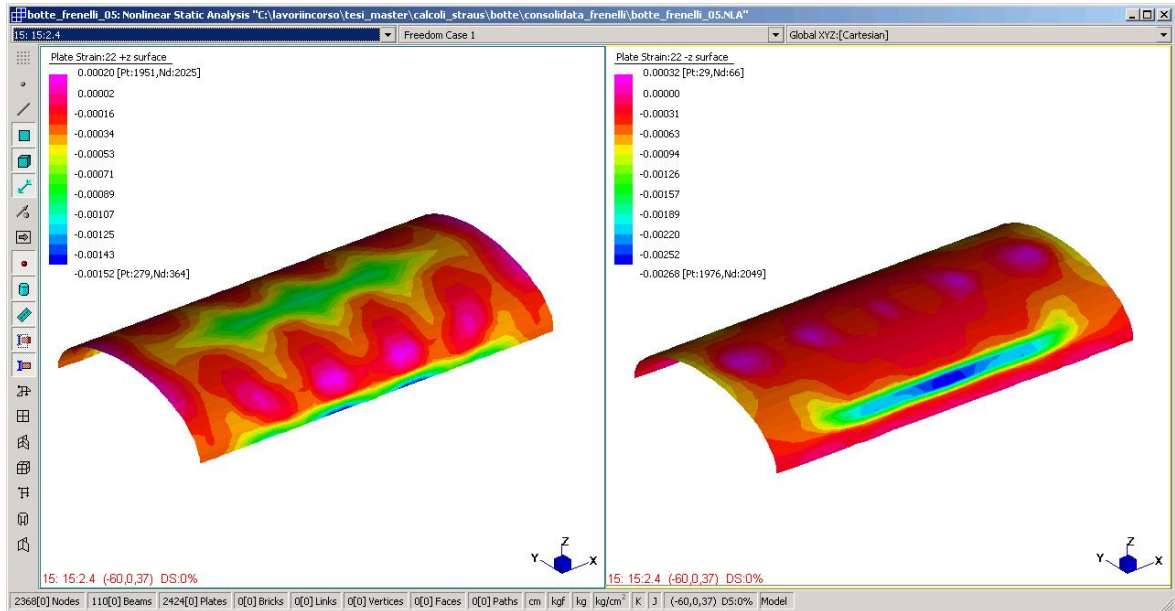
dalla quale è possibile ricavare un valore di prima istanza del moltiplicatore di collasso (in assenza di ogni limitazione alla capacità deformativa delle fibre compresse) pari ad  $\alpha = 2.7$ .

### 3.4.2. Controllo sulle $\varepsilon$

Al solito occorre verificare di quanto la non infinità duttilità a compressione della muratura possa erodere il valore desunto dalla analisi in plasticità indefinita (circa 2.7) .

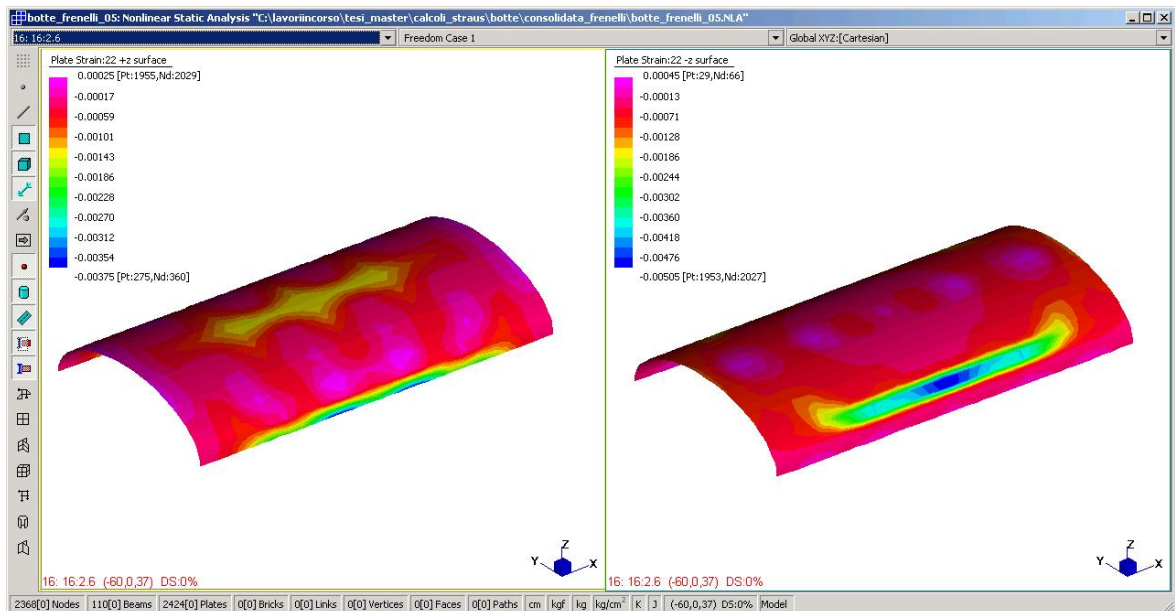


Con la solita procedura si mappano le  $\varepsilon$  in compressione all'estradosso (a sx) e all'intradosso (a dx) per lo step  $\alpha=2.4$ , provvisoriamente assunto come valore di collasso:



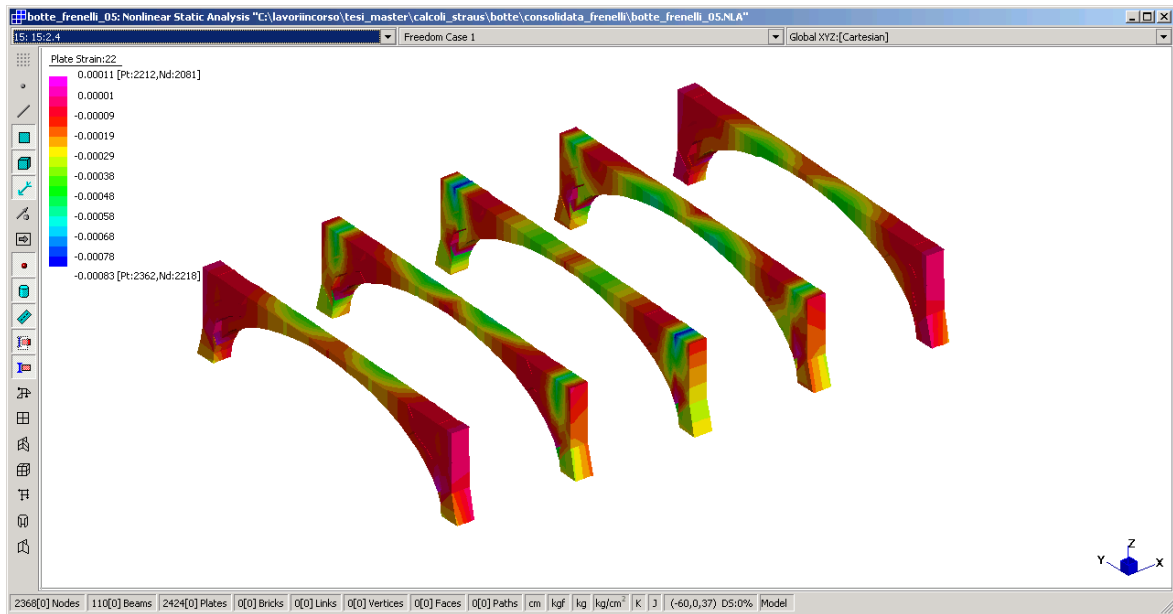
evidenziandosi un valore max pari al 2.7 per mille, inferiore al limite.

In presenza di un moltiplicatore dei carichi appena superiore, e sia  $\alpha=2.6$ , la situazione muta decisamente:



con superamento della  $\varepsilon_{\max}$ , in corrispondenza delle cerniere plastiche già denominate A e simm, e ancor più significativo superamento nelle cerniere denominate B e simm.

Analogo riscontro viene effettuato ovviamente per i frenelli, al valore di  $\alpha=2.4$ :



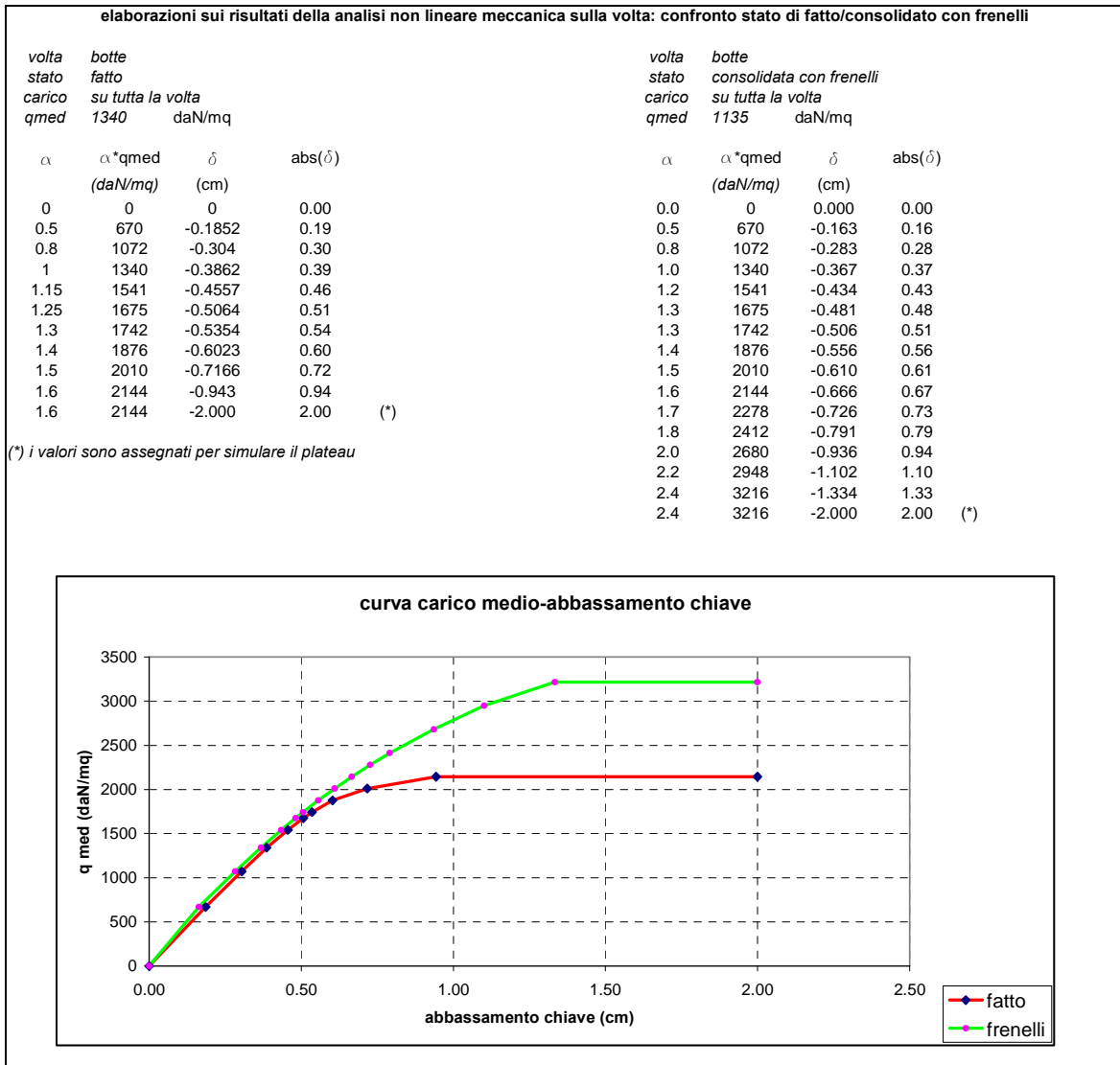
evidenziandosi un assoluto rispetto della  $\varepsilon_{\max}$  così come assunta.

Dunque la limitazione sulla duttilità indica che il valore di moltiplicatore massimo possa porsi pari a  $\alpha_{\text{coll}}=2.4$ .

Anche in questo caso, la soluzione che teoricamente si sarebbe ricavata da una analisi limite, senza controllo sugli spostamenti [Hodge, Locascio] si sarebbe stimato in eccesso il carico di collasso, e quindi a svantaggio di sicurezza, e precisamente nella misura da 2.40 a 2.70, e cioè anche in questo caso di quasi il 15% in più.

### 3.4.3. Confronto con volta non consolidata

Poiché i carichi medi per  $\alpha=1$  fra le due situazioni (fatto e consolidata con frenelli) non sono esattamente eguali, è necessario, per un confronto più adeguato, riportare le due curve carico-spostamento non semplicemente in funzione di  $\alpha$ , ma piuttosto del carico medio moltiplicato per  $\alpha$  :

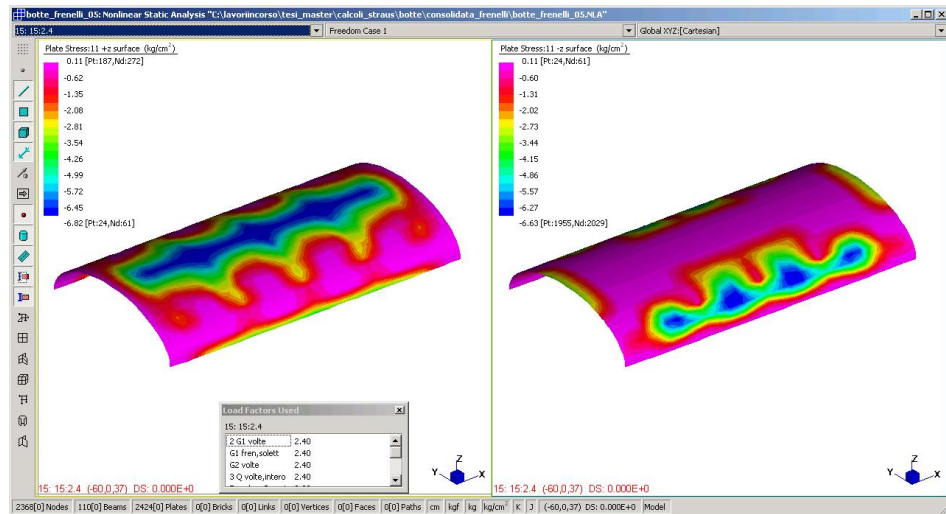


In termini di coefficiente di sicurezza sia ha dunque un incremento molto rilevante: esso passa da 1.6 a 2.4 , con un incremento dello stesso del 50% .

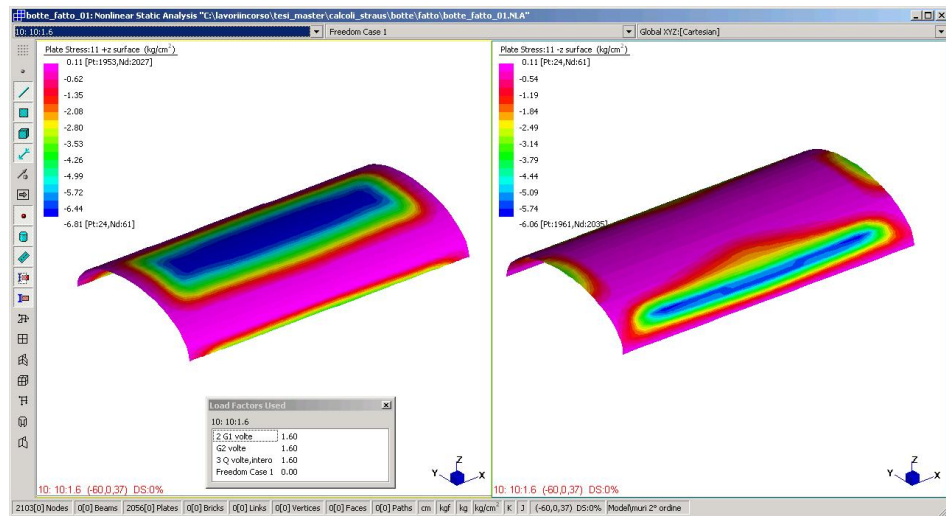
Dunque è possibile da un lato stabilire come l'intervento di consolidamento con frenelli apporti un sensibile incremento delle prestazioni ultime della struttura, cosa peraltro ben nota ai pratici, ma soprattutto quantificare il miglioramento introdotto, permettendo così una calibratura dello stesso.

Esperito questo primo confronto, si ritiene utile riportare ancora alcune considerazioni sull'assetto evolutivo della volta con frenelli, per *pesare* le cause vere del miglioramento introdotto .

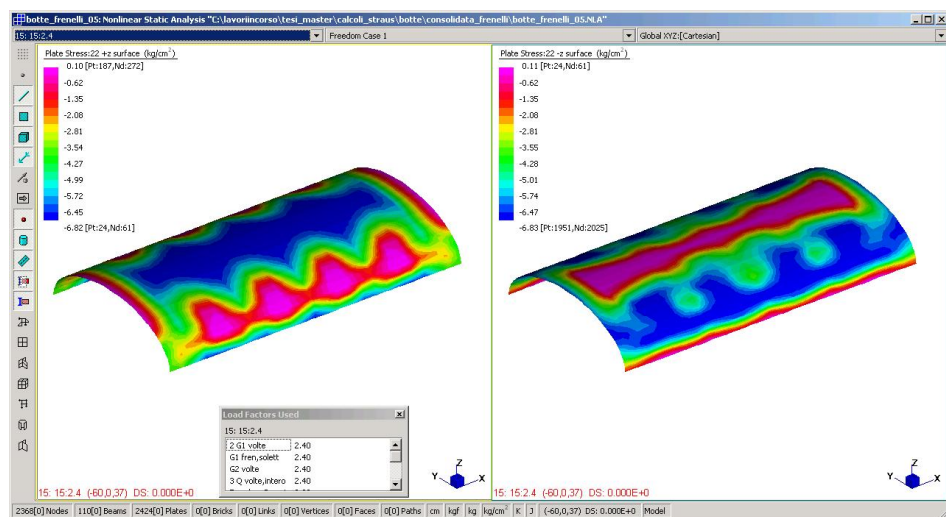
Assumendo lo *step* di crisi in corrispondenza di  $\alpha = 2.40$ , è possibile evidenziare la distribuzione delle tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , (a sx estradosso, a dx intradosso):



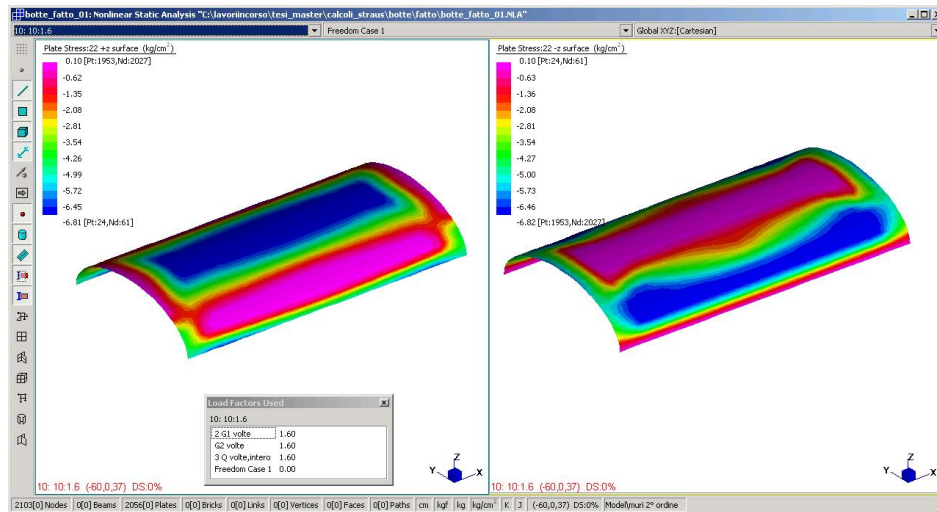
confrontate con quelle analoghe dello stato di fatto:



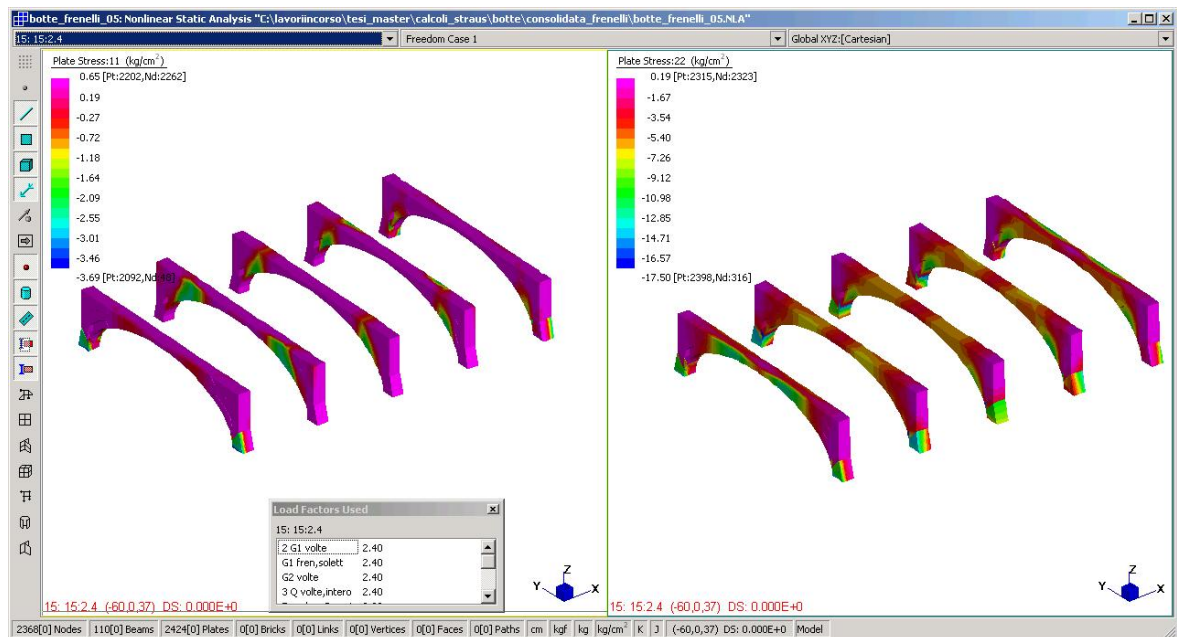
Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



ancora confrontate con le analoghe distribuzione dello stato di fatto:

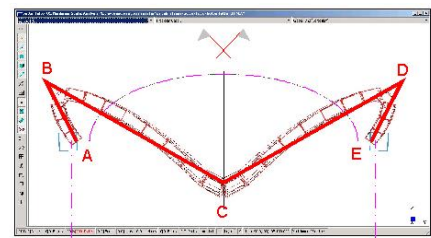


Proseguendo nella acquisizione di tutte le notizie utili alla comprensione dell'apporto dei frenelli, si riportano anzitutto le tensioni principali negli stessi,  $\sigma_{11}$  a sx e  $\sigma_{22}$  a dx:

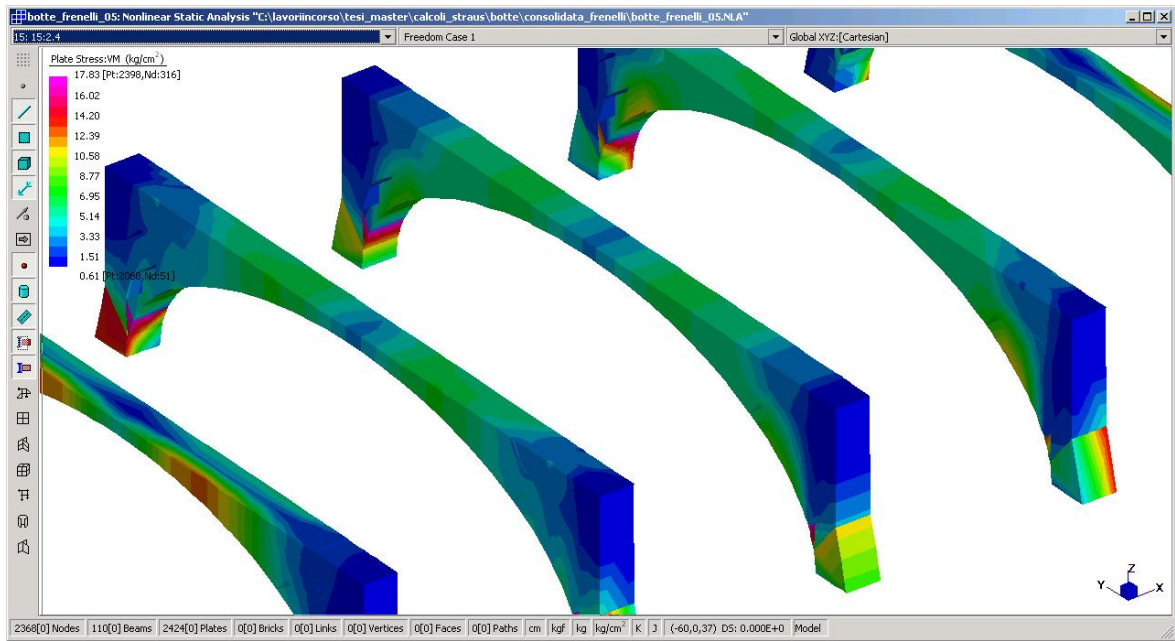


da cui si evidenziano le due zone di maggior impegno, e cioè l'una nella zona laddove la volta non consolidata tende a rialzarsi e spostarsi verso l'esterno (cerniere A e B) e l'altro in misura più limitata, in chiave.

Una idea del diverso livello di stress nelle due zone, e cioè che sia proprio quella delle reni ad essere maggiormente impegnata, è ben illustrato dalla mappatura delle tensioni di Von Mises,



che per quanto non utilizzabili in termini di criterio di rottura, hanno comunque il pregio di esprimere il livello medesimo con un solo indicatore:



E che sia effettivamente questa la ragione profonda del contributo dei frenelli è definitivamente chiarito : la loro azione non si esplica tanto in un irrobustimento della sezione di chiave o di quella alle reni, ma va vista come equivalente ad una azione “diagonale” che preme sulle cerniere alle reni, impedendo ai blocchi ivi convergenti di sollevarsi e inclinarsi verso l’esterno.

## **4. LA VOLTA A BOTTE CONSOLIDATA CON FASCE IN FRP**

### **4.1 I materiali compositi FRP: caratteristiche generali**

#### **4.1.1. Brevi richiami di base**

I cosiddetti FRP (*Fiber Reinforced Polymers*, ovvero Polimeri Rinforzati con Fibre) sono costituiti da un'anima portante e resistente a cui è assegnato il compito di resistere alle sollecitazioni esibendo particolare rigidità, immersa in una matrice, destinata a :

- proteggere le fibre ;
- equalizzare gli sforzi fra le fibre
- trasmettere le azioni dall'anima resistente al supporto, direttamente o per il tramite di appositi adesivi

L'armatura normalmente utilizzata è in fibra di carbonio, in fibra di vetro, in fibra aramidica. Le fibre, aventi un diametro di alcuni micron, in genere  $10\mu$ , vengono assemblate in un prodotto intermedio, il filo o filato, caratterizzato dal titolo, che misura la massa per unità di lunghezza del filo stesso, espresso in g/km , indicato con Tex (dunque un filo a 300 Tex pesa 300gr per kilometro ).

Intrecciando ortogonalmente fra loro i fili, si ottiene il tessuto: qui la dizione è interamente mutuata dalla industria tessile. Ci si riferisce dunque all'ordito, parallelo all'uscita del tessuto dal telaio, e alla trama , in senso ortogonale. I tessuti si distinguono in :

- monodirezionali: il tessuto (impropriamente tale) è costituito in pratica da solo ordito, con una trama leggera non strutturale, avente la sola funzione di tenere in posizione l'ordito fino alla immersione nella matrice ;
- bidirezionale : il tessuto è formato con quantità confrontabili di trama ed ordito ; in caso di parità di quantitativo, il tessuto è detto bilanciato .
- multidirezionale: la consueta classificazione di trama e ordito lascia il posto ad una pluralità ( $n>2$ ) di direzioni lungo cui viene disposto il filo .

#### **4.1.2. Produzione delle fibre di carbonio**

I filamenti di carbonio (scoperti da Edison nel 1879, e prodotti commercialmente dal 1960), quale base di partenza per ogni filato ed ogni tessuto, vengono ottenuti a partire da due tipologie di materia prima, e precisamente:

- poliacrilonitrile , in sigla PAN : dal cracking di idrocarburi si ottiene inizialmente propilene; questo sottoposto a trattamenti chimici opportuni da luogo al

acrilonitrile; quest'ultimo, dopo polimerizzazione (cioè trasformazione in lunghe catene) da luogo a poliacrilonitrile PAN ; ed infine da quest'ultimo , mediante ossidazione e pirolisi si giunge alle fibre di carbonio ;

- da pece di petrolio, mediante successivi trattamenti termofisici.

#### 4.1.3. Caratteristiche meccaniche delle fibre di carbonio

Va anzitutto precisato che in ciò che segue ci si riferisce in particolare alle fibre (di carbonio) e non al filato e non al tessuto. Si avrà modo infatti di evidenziare che le caratteristiche di quest'ultimi dipendono da parametri ulteriori, che risentono della modalità pratica di realizzazione.

Le fibre di carbonio presentano le seguenti caratteristiche:

- resistenza a trazione : 40 000 -50 000 daN/cm<sup>2</sup>
- modulo di Young a trazione : 2 000 000 – 6 000 000 daN/cm<sup>2</sup>
- peso specifico : 2 g/cm<sup>3</sup> =2000 kg/m<sup>3</sup>
- deformazione a rottura per trazione : 0.5%-1.7%
- tipo di comportamento a trazione : praticamente elastico-lineare sino a rottura

Uno dei parametri di indubbio interesse nella specificazione del campo d'uso di un materiale è certamente il fattore di utilizzo  $\sigma_v/\gamma$  :

fibra di carbonio	45 000/2 000 =	22.0
alluminio	3000/2700 =	1.1
acciaio	4 300 / 7850 =	0.5
legno	150 /800 =	0.20
calcestruzzo	250 /2500 =	0.10
muratura	50/1800 =	0.03

Ogni commento ulteriore è ridondante, se non fosse per segnalare l'enorme passo avanti ottenuto dalla tecnologia dei materiali (la tabella precedente può leggersi, legno a parte, con la scala dei tempi all'indietro, oggi fibre di carbonio, trenta secoli fa la muratura).

#### 4.1.4. Caratteristiche della matrice

La matrice negli FRP è usualmente un resina artificiale : si tratta di un prodotto ottenuto a partire da due componenti (oligomero ed un agente reticolante, di solito ammina alifatica) che portati a contatto permettono lo sviluppo di una reazione di reticolazione, che trasforma il tutto in polimeri, cioè macromolecole, costituite da un gran numero di gruppi molecolari di base, che tendono a ripetersi a catena .



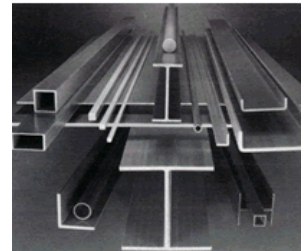
La reazione di reticolazione può svolgersi sia a temperatura ambiente (ed è il caso delle matrici preparate in cantiere) che in condizioni di maggior temperatura (matrici a base dei prodotti preconfezionati in industria) .

Le caratteristiche meccaniche della matrice sono assai diverse da quelle della fibra che le arma: il modulo elastico è notevolmente più basso, con valori dell'ordine di 50 000 daN/cm<sup>2</sup> (contro i 2 000 000-6 000 000 daN/cm<sup>2</sup> della fibra di carbonio). Anche in termini di resistenza la tensione di rottura è notevolmente inferiore, con valore tipico di 400 daN/cm<sup>2</sup> (contro i 40 000- 50 000 daN/cm<sup>2</sup> ). Un parametro invece sostanzialmente simile, e comunque mai inferiore a quello delle fibre (poiché condizionerebbe negativamente lo sfruttamento della  $\sigma_r$  delle fibre), è la deformazione a rottura per trazione.

#### 4.1.5. Caratteristiche dei prodotti

##### Prodotti ottenuti per pultrusione

Pultrusione = “pull”+”extrusion” : processo continuo di estrusione in trazione grazie al quale, in stabilimento, apposite macchine accettano in ingresso fibre in filato, le distendono in apposite direzioni, passandole quindi ad appositi bagni di impregnazione, laddove la matrice vi entra in contatto . Grazie alla trazione applicata alle fibre da appositi organi, le stesse vengono “tirate” e costrette con la resina che le ha impregnate, a passare attraverso stazioni di preformatura e stampo finale (ad alta temperatura, in modo da favorire la polimerizzazione della matrice di resina) , ottenendo prodotti finiti del tutto simili, morfologicamente, a profilati metallici, piatti, barre, ....



*Vantaggi:* grande produttività, elevata qualità di produzione, perfetto allineamento delle fibre secondo la direzione di tiro, notevole rapporto  $A_{fibre}/A_{totale}$

*Svantaggi:* obbligo di forme longitudinali rettilinee, difficoltà a realizzare connessioni non fragili fra singoli elementi pultrusi, necessità di ricorrere ad adesivi qualora si voglia utilizzare le lamine come rinforzo di strutture preesistenti, non applicabilità come rinforzo a strutture non piane.

##### tessuti da impregnare in situ

Si tratta di tessuti forniti dalle case di produzione in accoppiata ad una specifica resina : all'atto della posa in opera i tessuti (al solito mono o bidirezionale, più raramente

multidirezionali) vengono saturati con la matrice, che va così ad impregnare il tessuto medesimo .

*Vantaggi:* facilità notevole nel fasciare e rinforzare elementi di forma complessa, anche a doppia curvatura e con spigolosità, grazie alla flessibilità del tessuto secco

*Svantaggi:* minore facilità di controllo (dall'industria al cantiere) nella fase di impregnazione, limiti tecnologici al rapporto  $A_{\text{fibre}}/A_{\text{totale}}$  .

#### tessuti pre-impregnati

Si tratta di tessuti forniti dalle case di produzione direttamente impregnati a resina , e per i quali è necessario, come per le lamine pultruse, l'azione di un adesivo ad hoc per l'incollaggio al supporto .

#### **4.1.6. Comportamento del FRP a trazione: modello concettuale**

Dal punto di vista strutturale matrice e anima resistente possono riguardarsi come due elementi in parallelo; operando in controllo di spostamenti (o meglio di  $\varepsilon$ ), eguali ad ogni *step* fra matrice e armatura (congruenza), è possibile ricavare facilmente la  $\sigma$  che pervade ciascuna delle due componenti . Moltiplicando ciascuna delle  $\sigma$  per l'area pertinente è così possibile ricavare la legge fra la  $\varepsilon$  e la forza totale applicata; se quest'ultima viene divisa per l'area totale del composito (matrice+fibre) è possibile ottenere il diagramma  $\sigma - \varepsilon$  che caratterizza il composito stesso, che ovviamente risente (a parità di caratteristiche elasto-meccaniche dei componenti) della quantità  $A_{\text{fibre}}/A_{\text{totale}}$  (detto rapporto di miscelazione).

Questo è l'approccio normalmente utilizzato nei prodotti in cui la matrice è realizzata in industria (prodotti pultrusi e prodotti pre-impregnati) ; è invece non consigliabile nel caso di impregnatura in cantiere in quanto il processo può risentire maggiormente di imperfezioni. In questo caso è d'uso dunque approcciare l'insieme come formato dalla sola anima resistente, controllando soltanto che –a garanzia della totale integrità della matrice- la deformazione ultima a rottura di questa sia sufficientemente superiore a quella dell'anima .

## **4.2 Caratteristiche del rinforzo prescelto**

Per quanto riguarda la tipologia di rinforzo, si è data preferenza nel caso in specie a nastri in fibra di carbonio (C-FRP) immersi in matrice a base di resina epossidica da stendersi in sito, scelti fra quelli di una primaria casa , con caratteristiche come da prospetto:

## SikaWrap®-300C (VP) / Sikadur®-330

Sistema di rinforzo in tessuto unidirezionali in fibra di carbonio

### Indicazioni generali

**Descrizione** Sistema di rinforzo o riparazione da applicare esternamente su elementi strutturali realizzati in cemento armato, muratura o legno.  
*Componenti del sistema:*  
 tessuti in fibra di carbonio SikaWrap 300 C (VP) unidirezionale  
 resina impregnante a base epossidica Sikadur 330 per l'impregnazione a secco

**Campi di impiego** Rinforzo di strutture in cemento armato, murature e legno in caso di sollecitazione di flessione e di taglio dovuto a:

- incremento della portata
- modifica della destinazione d'uso di edifici
- riparazione di difetti
- prevenzione di danni determinati da fenomeni sismici
- per soddisfare modifiche intervenute nelle norme o nelle specifiche

**Vantaggi**

- Fibra di modulo elastico simile a quello dell'acciaio
- Resina impregnante fluida esente da solventi per agevolare l'uso in cantiere
- Flessibilità della geometria delle superfici (travi, colonne, camini, pilastri, pareti)
- Resistenza agli agenti chimici ed ai condizionamenti atmosferici ed ambientali (assenza di corrosione)
- Rivestimento sottile, anche dopo applicazione di diversi strati di tessuto (fino a 3).

### Caratteristiche

**SikaWrap 300 C (VP)**  
**Tipo di fibra** Fibra al carbonio ad alta resistenza

### Dati tecnici

**SikaWrap 300 C (VP)**  
**Orientamento delle fibre** 0° (unidirezionale) - il tessuto prevede speciali fibre della trama che impediscono che le fibre si allentino (processo di termoindurimento)

**Peso per unità di superf.** ±15 g/m<sup>2</sup>

**Spess. progetto tessuto** 0,166 mm (basato sull'area totale delle fibre al carbonio)

**Densità** 1,79 g/cm<sup>3</sup>

### Proprietà fisico/meccaniche

#### Proprietà della fibra secca

**Resist. trazione delle fibre** > 3900 MPa (nominale)

**Modulo di elasticità a trazione delle fibre** 230 GPa

**Allungamento a rottura** >1,5% (nominale)

**Lunghezza di tessuto/rot.** 50 m

**Altezza del tessuto** 300-600 mm



# SikaDur® 330

Epoxy Laminating Resin for the  
SikaWrap® Structural Strengthening System

## Technical Data Sheet

### DESCRIPTION

SikaDur 330 is a solvent free, cold cure, two component epoxy resin based product formulated specifically for the bonding of the SikaWrap structural strengthening fabrics using the "dry" application system.

### USES

- ★ Bonding of SikaWrap structural fabrics to concrete, timber and masonry substrates.
- ★ SikaDur 330 is used as a seal coat and laminating resin for horizontal and vertical applications.

A component of the SikaWrap structural strengthening system.

### ADVANTAGES

- ★ Part of a complete and independently tested system.
- ★ Formulation facilitates application in both vertical and overhead situations.
- ★ Excellent adhesion to correctly prepared substrates, even when damp.
- ★ Good stress transfer between the structural member and structural fabric.
- ★ Comprehensively proven in field applications.
- ★ Full specification service available.
- ★ No VOC's (Volatile Organic Compounds).
- ★ Solvent free.
- ★ High creep resistance under permanent load.
- ★ High temperature resistance.
- ★ High strength and modulus.
- ★ High abrasion and shock resistance.

### Technical Data (typical)

Colour:	Grey (mixed)	
Density:	Approx 1.31 kg/l	
Application Temperatures:		
Min	+10°C	
Max	+35°C	
Maximum Service Temperature:	50°C	
Curing Shrinkage:	Negligible	
Heat Deflection Temperature:	Curing	HDT
	7 days, +10°C	+36°C
	7 days, +10°C plus 7 days, +23°C	+43°C
	7 days, +23°C	+47°C
	7 days, +35°C	+53°C
Flexural Modulus:	Approx 3,800 N/mm <sup>2</sup>	
Tensile Strength:	Approx 30.0 N/mm <sup>2</sup>	
Adhesive Strength:	>4 N/mm <sup>2</sup> - concrete failure dependent on concrete strength and surface preparation	
Pot Life: (23°C RH 50%)	Approx 60 mins	
Open Time:	30 mins (@35°C)	

All above values are approximate

Il prodotto è considerato applicato in strisce di larghezza 10cm : ciascuna di esse ha un'area resistente in fibra di carbonio pari ad  $A_{rt}=0.166\text{cm}^2$  (dove il pedice indica *resistente tessuto*) con un modulo elastico  $E_{fib}=2\ 300\ 000\ \text{daN/cm}^2$  ed una resistenza a trazione  $f_{fib}=44\ 100\ \text{daN/cm}^2$ .

Va rilevato che i valori appena riportati sono riferiti al costituente del tessuto, cioè la fibra, e vanno opportunamente modificati (nel senso di riduzione) per tener conto di specifiche considerazioni, come formulate nella CNR DT200/2004, che costituisce un valido riferimento progettuale, anche ai sensi di quanto indicato al cap.12 delle NTC '08.

### la prima considerazione

In linea generale, in presenza di tessuto con trama ed ordito, le caratteristiche resistenti del tessuto non possono assumersi pari a quelle delle fibre, in quanto vari fattori relativi alla reale geometria del tessuto ed in particolare alla ondulazione del fascio di fibre in

corrispondenza delle intersezione nei nodi trama-ordito , portano a modifiche considerevoli delle proprietà meccaniche di base. Altri fattori di riduzione sono legati alle inevitabili imperfezioni geometriche, allineamento e regolarità di distribuzione delle fibre, vuoti indesiderati legati alla manipolazione delle fibre per passare al tessuto vero e proprio .

Per considerare questi effetti, le citate istruzioni contemplano due modi, ambedue basati su prove sperimentali da eseguirsi a cura del produttore ; nella prima modalità , basata sulla assunzione esplicita che il comportamento del composito sia legato al solo comportamento del tessuto, trascurando il contributo della matrice, si mira alla individuazione dei fattori correttivi (riduttivi) da applicare alle proprietà delle fibre per riprodurre quelle misurate del tessuto.

Nella seconda modalità invece, si mira a caratterizzare l'intero composito (tessuto e matrice) , e quindi tenendo conto di entrambi gli apporti, caratterizzando così le proprietà meccaniche dell'insieme .

Come già evidenziato, la prima modalità è più frequentemente utilizzata quando il prodotto sia impregnato in situ, con una fase di difficile controllabilità : ed è proprio per questo che nel prosieguo si procede con tale modalità.

La stessa richiede la determinazione di due fattori,  $\alpha_{fe}$  e  $\alpha_{ff}$  , da applicare l'uno al modulo elastico e l'altro alla resistenza .

$$\alpha_{fE} * A_{rt} * E_{fib} \qquad \alpha_{ff} * A_{rt} * f_{fib}$$

E' dunque indispensabile che i produttori “...indichino i valori dei coefficienti riduttivi  $\alpha_{fE}$  ed  $\alpha_{ff}$  , fornendo puntuali informazioni sulla campagna di prove sperimentali eseguite “.

Si stabilisce inoltre (3.3.3) che tali coefficienti non possano comunque eccedere il limite di 0.90.

la seconda considerazione

Ci si pone l'obiettivo di individuare, come per tutti i materiali da costruzione, degli opportuni coefficienti  $\gamma_m$  con cui penalizzare le resistenze caratteristiche, giungendo così ai rispettivi valori di calcolo, tenendo conto in particolare delle modalità di certificazione del prodotto (cd. livello A e livello B).

A questi coefficienti si affiancano degli ulteriori coefficienti  $\gamma_{rd}$  che tengono conto della modalità di collasso analizzata .

Ed infine, assunta la sensibilità dei compositi alle azioni di natura ambientale o più in generali legati alla durabilità, che caratterizzano l'applicazione particolare, vengono assunti ulteriori coefficienti riduttivi  $\eta$  .

applicazione al caso in studio

Per quanto riguarda i coefficienti  $\alpha_{FE}$  e  $\alpha_{ff}$  si assumono i seguenti valori :

$$\alpha_{FE} = 0.85 \quad \alpha_{ff} = 0.85$$

Assumendo il più prudente livello B di certificazione del prodotto (relativo ai soli materiali) si ha :

$$\text{per rottura} \quad \gamma_m = 1.25$$

$$\text{per delaminazione} \quad \gamma_m = 1.50$$

Per il modello di resistenza a pressoflessione si ha  $\gamma_{rd} = 1.00$

Per quanto riguarda l'ambiente d'esposizione, è lecito assumere la condizione d'esposizione denominata "interna" con fattore  $\eta = 0.95$ .

Gli altri fattori di riduzione astrattamente considerati (azione del fuoco, atti vandalici, urti ed esplosione) non sono considerati pertinenti nel caso in specie, considerando la posizione molto protetta dei nastri.

In definitiva per il calcolo in regime di pressoflessione, il materiale, in forma di striscia da 10cm di larghezza, viene così caratterizzato :

spessore equivalente in sola fibra

$$t_{eq} = 0.167 \text{ mm} = 0.0167 \text{ cm}$$

area resistente solo tessuto

$$A_{rt} = 167 \text{ cm} * 10 \text{ cm} = 0.167 \text{ cm}^2$$

tensione di calcolo

$$f_{fib} * \alpha_{ff} * \eta / (\gamma_{rd} * \gamma_m) = 44100 * 0.85 * 0.95 / (1.00 * 1.25) = 28\,480 \text{ daN/cm}^2$$

forza a trazione di calcolo

$$28480 * 0.167 = 4750 \text{ daN}$$

modulo E di calcolo

$$\alpha_{FE} * E_{fib} = 0.85 * 2300000 = 1\,955\,000 \text{ daN/cm}^2$$

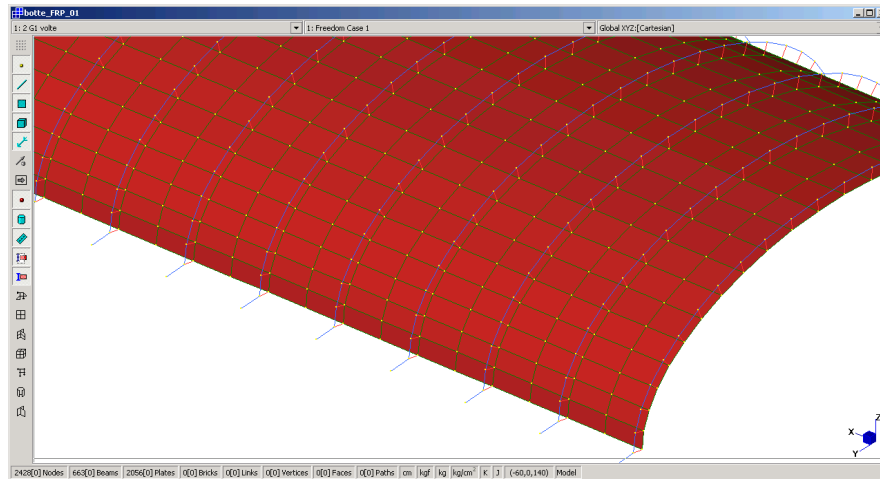
Si ritornerà più avanti sulla resistenza a delaminazione.

### 4.3 Le modifiche al modello

#### 4.3.1. La geometria

Assumendo come base quello della volta non consolidata, si è operata la introduzione di aste *truss*, cioè a comportamento esclusivamente assiale, a distanza dal piano medio della

volta di 10cm, accoppiato alla medesima mediante elementi virtuali di trasmissione (a modellare l'azione di adesione fibra-volta):



Si è attribuito ai *truss* un'area di 0.167cm<sup>2</sup>, un modulo E costante pari a 1955000daN/cm<sup>2</sup>, in uno con il carattere *no compression* ed un limite fragile (*brittle*) in trazione pari a 4750daN, precisandosi che controllo sul *range* di sforzo [0-4750daN] opera ovviamente, nella sola analisi non lineare per meccanica.

#### 4.3.2. I carichi

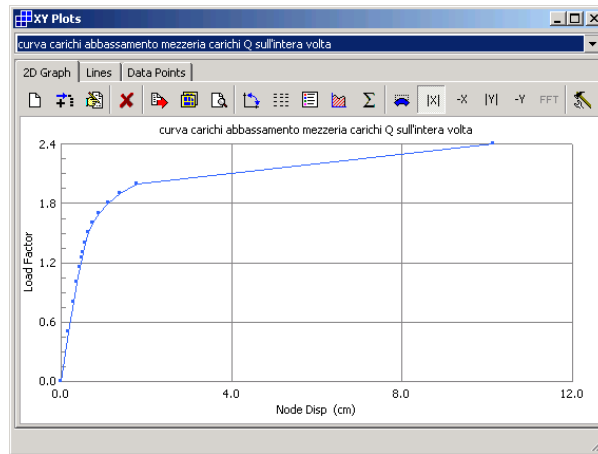
Nel percorso di consolidamento mediante nastri in FRP applicati all'estradosso, va ovviamente prevista la rimozione temporanea del rinfiango della volta e del pacchetto di pavimentazione sovrastante; a lavorazione strutturale conclusa, si riposizionano i rinfianchi e si rifanno massetti e pavimentazione. Dunque prescindendo da eventuali modifiche legate ai pesi dei nuovi componenti, l'intervento di per sé non modifica i carichi agenti sulla volta (ed in ciò differenziandosi dall'intervento con frenelli).

Nulla impedisce ovviamente di accoppiare i due interventi, ed è ipotesi da esplorare: per ora basta osservare che i carichi sono esattamente quelli pregressi, a cui corrispondeva, nella combinazione a pieno carico ( $\alpha=1$ ) un valore medio del carico pari a 1340 daN/mq.

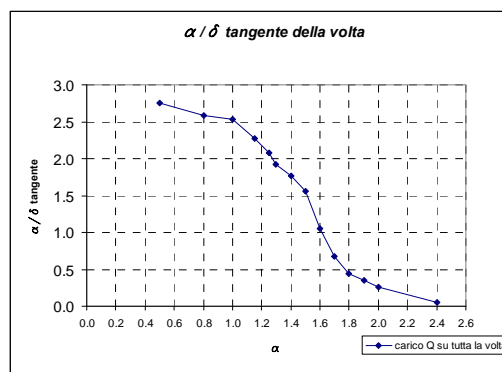
### 4.4 L'analisi non lineare per meccanica

#### 4.4.1. Sviluppo

Sulla base delle caratteristiche meccaniche già assunte per la volta vera e propria, e con l'introduzione nel modello dei *truss* rappresentativi delle fasce in FRP, è stato possibile rilanciare l'analisi non lineare per meccanica, monitorando in particolare lo spostamento del nodo di chiave a centro volta:



o in termini di rigidezza tangente (a meno del valore di forza):

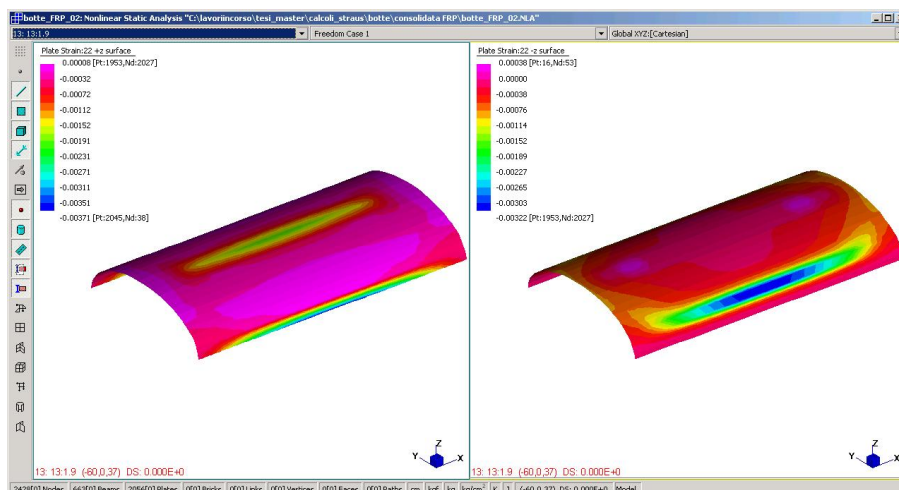


dalla quale è possibile ricavare un valore di prima istanza del moltiplicatore di collasso (in assenza di ogni limitazione alla capacità deformativa delle fibre compresse) pari ad  $\alpha=2.4$ .

#### 4.4.2. Controllo sulle $\varepsilon$

Al solito occorre verificare di quanto la non infinità duttilità a compressione della muratura possa erodere il valore desunto dalla analisi in plasticità indefinita (circa 2.4).

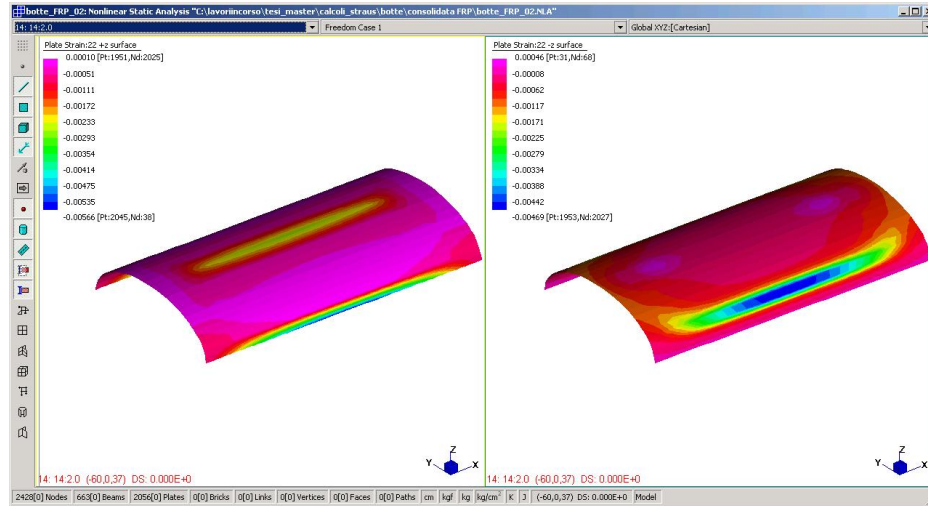
Con la solita procedura si mappano le  $\varepsilon$  in compressione all'estradosso (a sx) e all'intradosso (a dx) per lo step  $\alpha=1.9$ , provvisoriamente assunto come valore di collasso:





evidenziandosi un valore max (3.7 per mille) solo di pochissimo superiore al valor limite (3.5 per mille) , tanto da poterli considerare coincidenti .

In presenza di un moltiplicatore dei carichi appena superiore, e sia  $\alpha=2.0$ , la situazione muta decisamente:



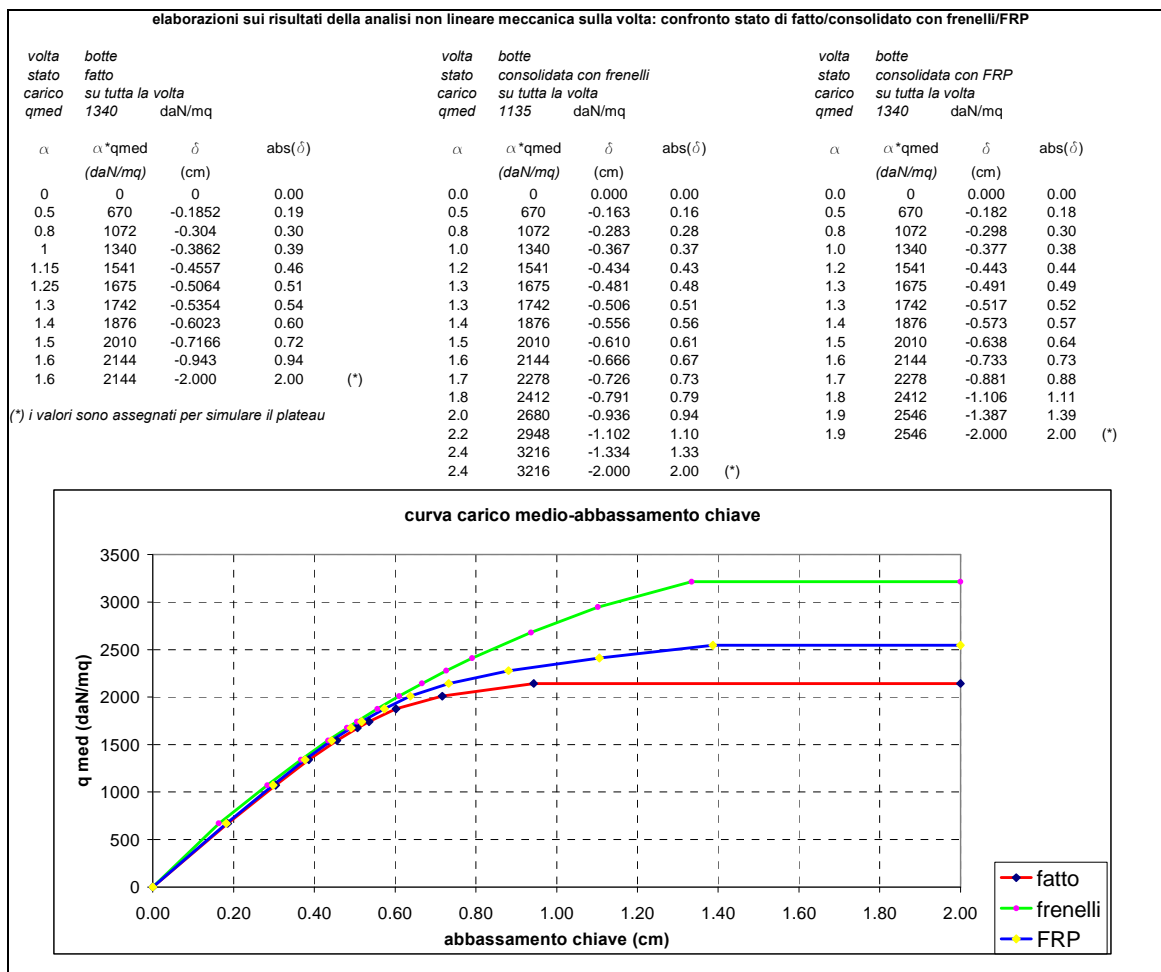
con superamento della  $\varepsilon_{\max}$  , in corrispondenza delle cerniere plastiche già denominate A e simm, e ancor più esteso superamento nelle cerniere denominate B e simm.

Dunque la limitazione sulla duttilità conferma che il valore di moltiplicatore massimo possa confermarsi in  $\alpha_{\text{coll}}=1.90$ , contro il valore di 1.60 assunto dalla volta non consolidata.

Si ripete anche in questo caso la erosione del moltiplicatore desumibile da limit-design dovuta alla limitazione sulle e della muratura con valore che passa da 2.4 a 1.9 e cioè in questo caso di oltre il 25% in più .

#### 4.4.3. Confronti con le due situazioni già analizzate

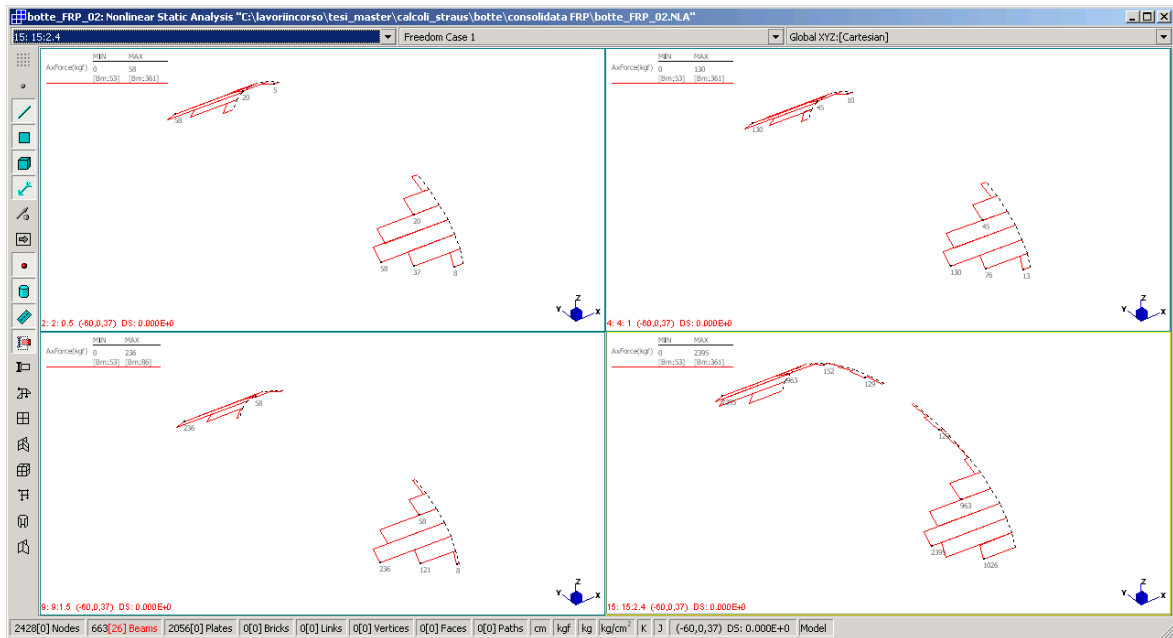
E' opportuno a questo punto riportare in un unico diagramma, la legge evolutiva carico Q/abbassamento in chiave, nei tre casi sinora analizzati:



Risulta molto chiaro che fra i due interventi di consolidamento così come proporzionati, quello con frenelli porti ad un più significativo incremento della portanza a collasso (con  $\alpha_{coll}$  che passa da 1.6 a 2.4), che invece risulta meno marcato (ma non per questo da censurare) con il consolidamento in FRP, con  $\alpha_{coll}$  che passa da 1.6 a 1.9.

Qualche osservazione è necessaria in ordine ai nastri ed al loro progressivo comportamento.

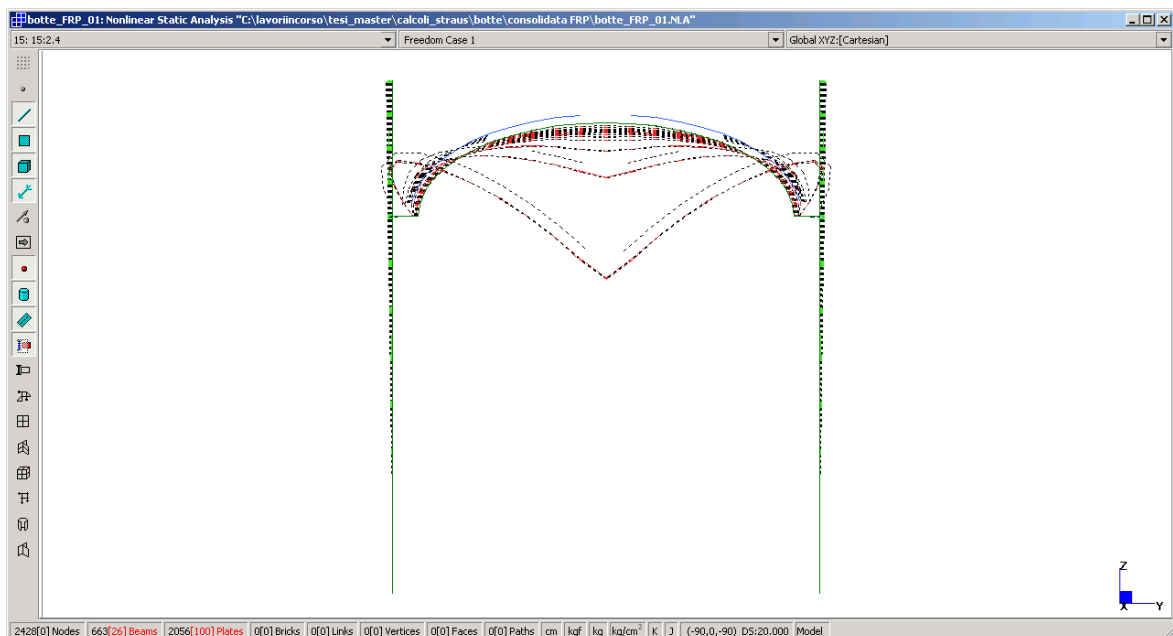
Si individuano quattro *step* significativi, caratterizzati ciascuno da a crescente 0.50-1.00-1.50-2.40, monitorando anzitutto quali sono effettivamente in tiro (cioè non esclusi perché a compressione) e quali siano gli sforzi assiali che li sollecitano (si ricorda che il limite utilizzato è di 4750daN):



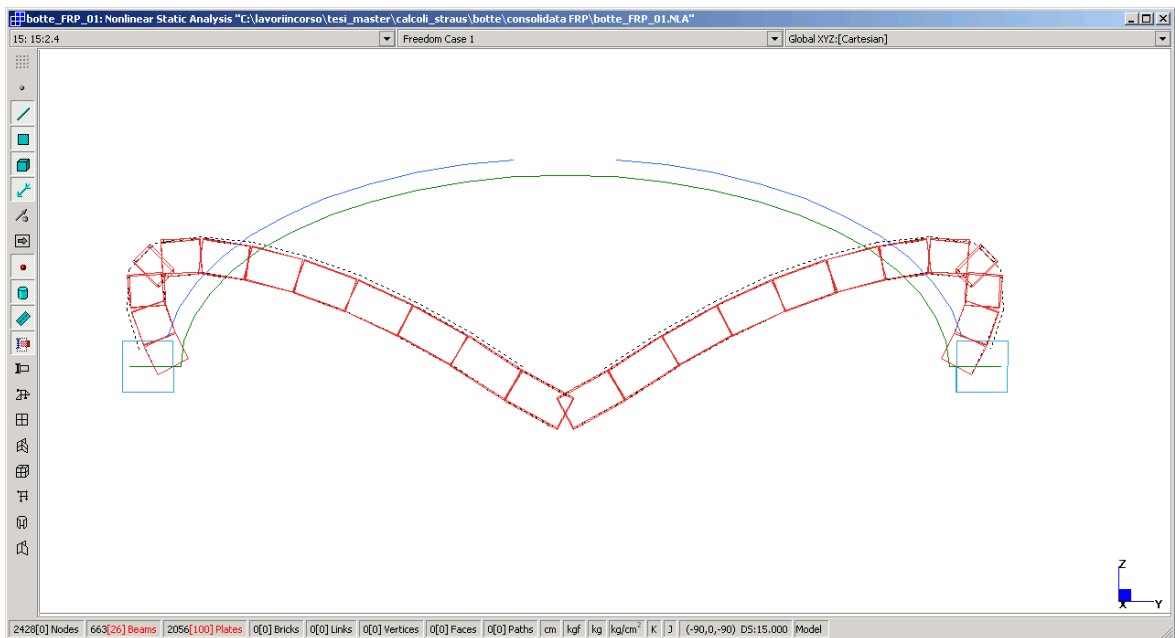
Risulta chiaramente che:

- come prevedibile , i nastri effettivamente chiamati in causa sono solo quelli a alle reni, dove si impegnano nel ritardare la formazione delle cerniere plastiche in B e D;
- i nastri stessi non riescono comunque ad esibire la loro massima capacità a trazione , con un fattore di utilizzo che allo *step* con  $\alpha=2.40$  è pari a  $2395/4750=50\%$  .

Per chiarire quale sia il motivo di questo sottoutilizzo, si pone l'attenzione , come già per la volta non consolidata, sulla fascia mediana della volta stessa, considerando anche i due piedritti (dei quali si ricorda viene portata in conto la sola deformabilità flessionale indefinitamente elastica) :

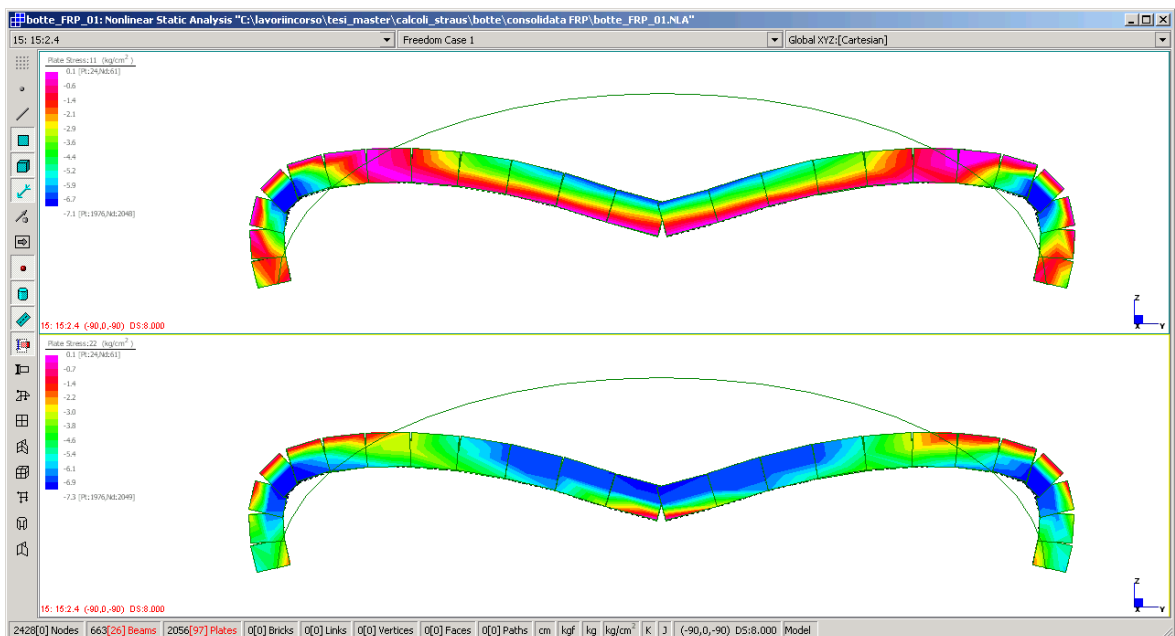


e più in dettaglio all'ultimo step ancora convergente ( $\alpha=2.4$ ):



Ebbene confrontando le deformate con quelle ritrovate in analisi della volta non consolidata, non può che notarsi la assoluta similitudine in termini di posizione delle cerniere plastiche (ABCDE) e conseguentemente del cinematismo di collasso .

E per capire come ciò avvenga, basta focalizzare l'attenzione sulle mappature della  $\sigma_{11}$  e della  $\sigma_{22}$  all'ultimo step di convergenza:



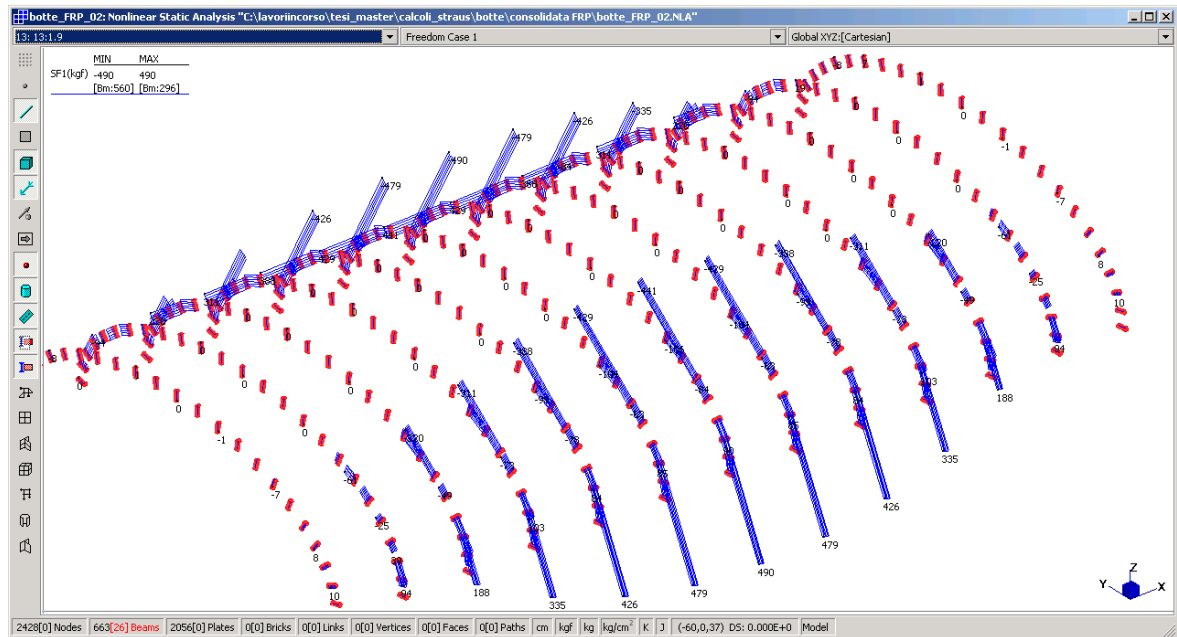
ed in particolare nelle zone alle reni, laddove si esplica l'azione del FRP : ebbene qui tutto sulla sezione è ormai ampiamente plasticizzato, sia a trazione,  $\sigma_{11}$  (ma c'è ancora l'FRP pienamente attivo) e sia a compressione,  $\sigma_{22}$  : per quanto si possano avere materiali ancora più resistenti come armatura, la sezione mista muratura-FRP si comporta esattamente come

una sezione in c.c.a. fortemente armata : se non c'è più modo di aumentare la compressione sul block stress, è del tutto influente avere ancora residuo di resistenza nelle barre d'armatura (FRP) , ed il momento attinge al suo valore ultimo.

Dunque le fasce in FRP ritardano (cioè innalzano  $\alpha$ ) la formazione delle due cerniere plastiche in B ed D alle reni, nulla potendo per quelle in A-E e per quella in C , laddove la fascia si ritrova dal lato inefficace.

#### 4.4.4. Controllo della delaminazione

Un'altra considerazione riguarda il limite di scorrimento fra la fascia di FRP ed il supporto in muratura, in assoluta analogia con il valor limite a taglio dei connettori in una struttura mista acciaio-clt ; nel caso in specie questa azione è rappresentata dalle azioni di taglio che impegnano i link assunti come connettori :



con valor massimo pari, per li'assunto valore di  $\alpha_{coll}=1.90$  a circa 490 daN .

Ogni *link* esercita la sua azione su una superficie di competenza, che ha una dimensione di 10cm nel senso normale alla figura, e l'altra pari all'interasse fra i *link* stessi , variabile da un minimo di 20 cm alle reni a circa 30cm in chiave ; assumendo ovviamente il valore minore, poiché più pertinente alla zona di massimo cemento, si ha una  $\tau_{media} = 490/(10*20)=2.5$  daN/cm<sup>2</sup> da confrontare con i valori forniti in bibliografia ed in norma tecnica, per scongiurare il fenomeno della delaminazione . Non è possibile affrontare per economia di lavoro questo aspetto in maggior dettaglio, e tuttavia può affermarsi che il valore derivante dal calcolo è assolutamente tranquillizzante.

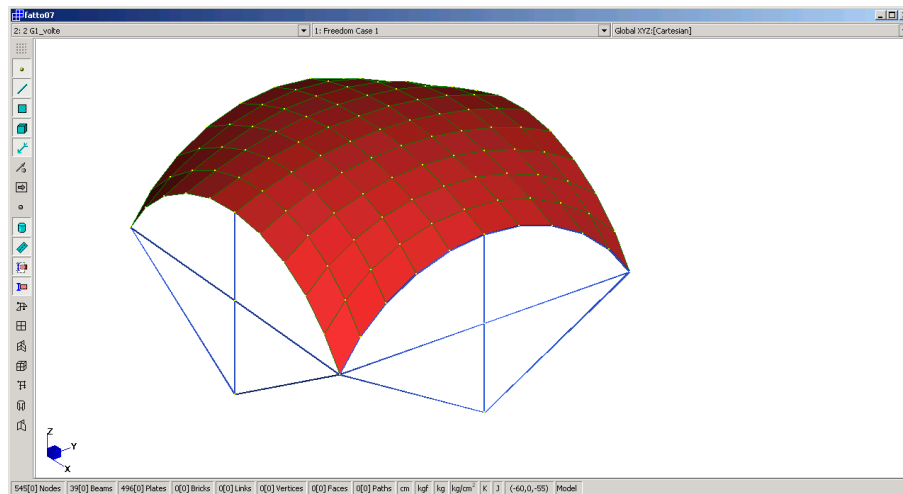
## 5. LA VOLTA A VELA

### 5.1 Aspetti generali

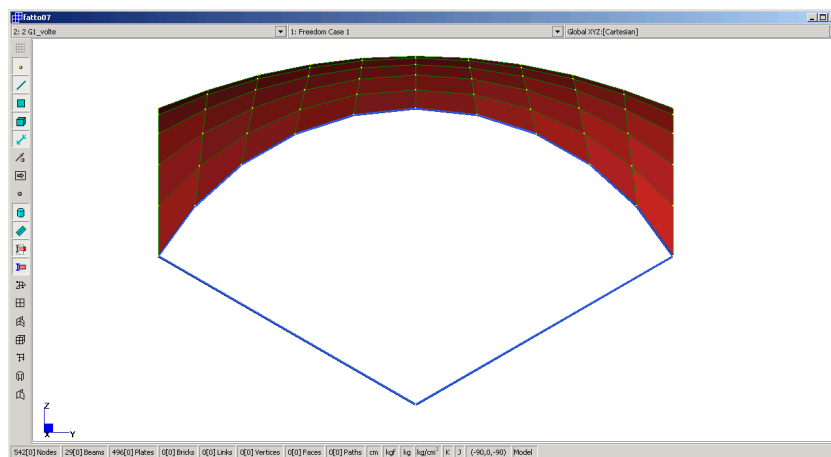
#### 5.1.1. La geometria

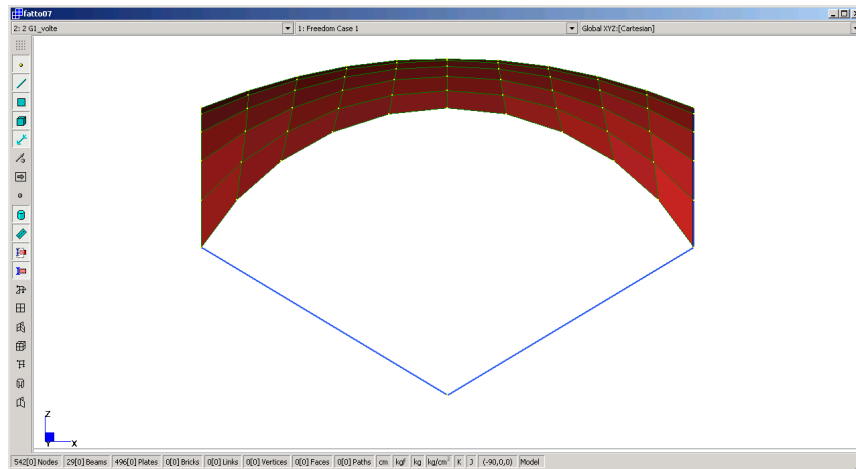
La sottostruttura oggetto di analisi è costituita da una ideale porzione di fabbricato in un ordine, coperto con volte a vela . Le murature d'ambito delineano perimetralmente l'ambiente, con spessore di 60 cm .

Ciascuno degli archi d'imposta ha sagoma in arco di circonferenza ribassato; per quello parallelo ad X si ha raggio di 350cm , luce fra le imposte pari a 600cm e monta di 170cm ; per l'altro arco d'imposta, parallelo ad Y si ha raggio di 341cm , luce fra le imposte pari a 590cm e monta di 170cm.



La volta presenta spessore costante di 20cm .





### 5.1.2. I materiali

Si caratterizzano in maniera del tutto eguale a quella utilizzata per la volta a botte non consolidata .

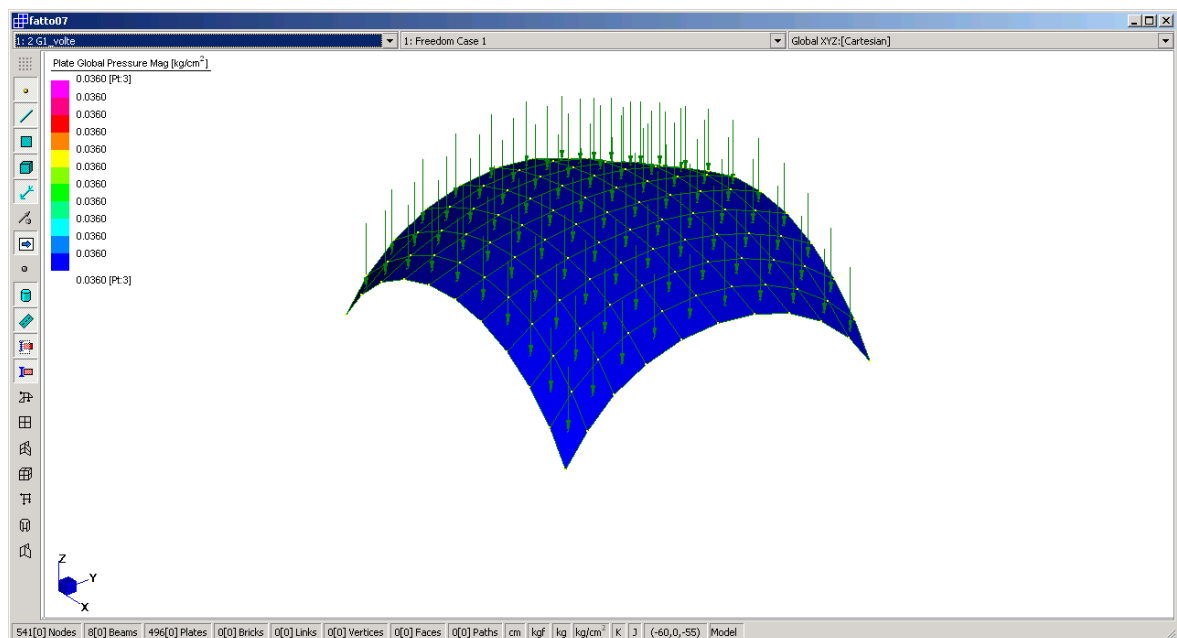
### 5.1.3. I carichi

Le condizioni elementari di carico agenti sulla struttura sono così individuate:

$$G_{1\text{volte}} \quad G_{2\text{volte}} \quad Q_{\text{volte,totale}}$$

precisandosi che le azioni connesse ai muri non hanno rilevanza nella analisi di cui al presente capitolo, poiche' in esso le murature perimetrali sono trattate in costanza di comportamento indefinitamente lineare per meccanica .

Il carico  $G_{1\text{volte}}$  afferisce al peso proprio della volta, che per spessore di 20cm, risulta essere pari a  $1800 \cdot 0.20 = 360$  daN/mq:



ed ammette una risultante pari a  $39.79mq \cdot 0.20m \cdot 1800daN/mc = 14320 daN$ .

Il carico  $G_{2volte}$  afferisce alla somma delle seguenti aliquote:

*quota variabile*

peso del ricoprimento in materiale di risulta, di altezza variabile, valutato con

$\gamma_{ricopr} = 1500daN/mc$

*quota costante*

pavimentazione in ceramica 20 daN/mq

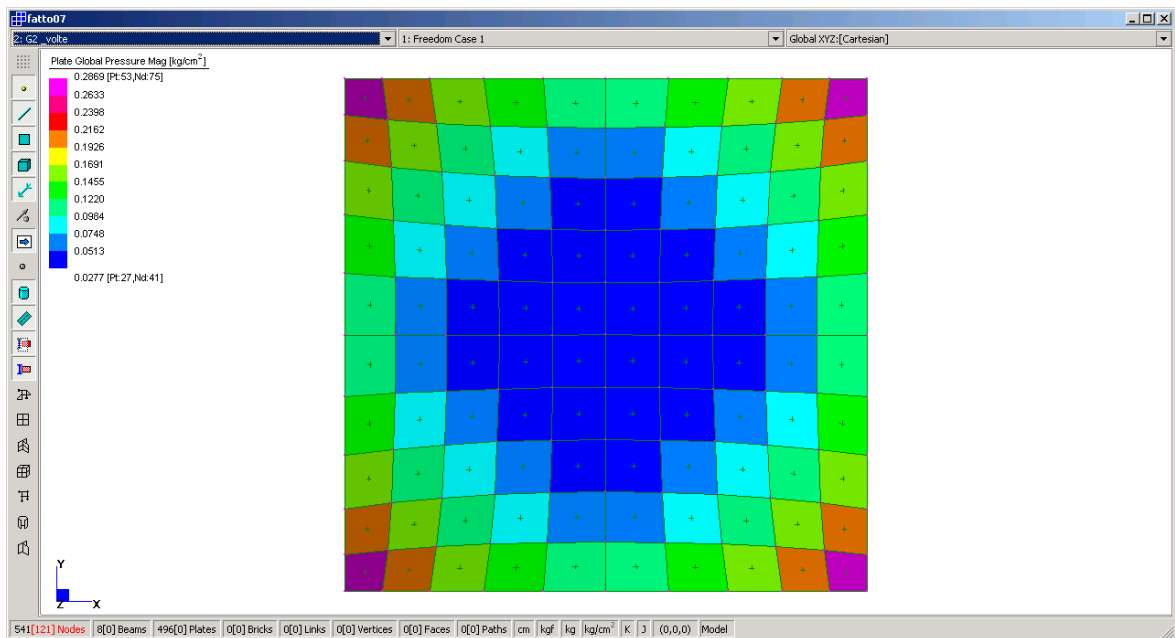
massetto di allettamento in calce  $s=3cm$  70

intonaco intradosso 30

aliquota tramezzi 120

-----  
240 daN/mq

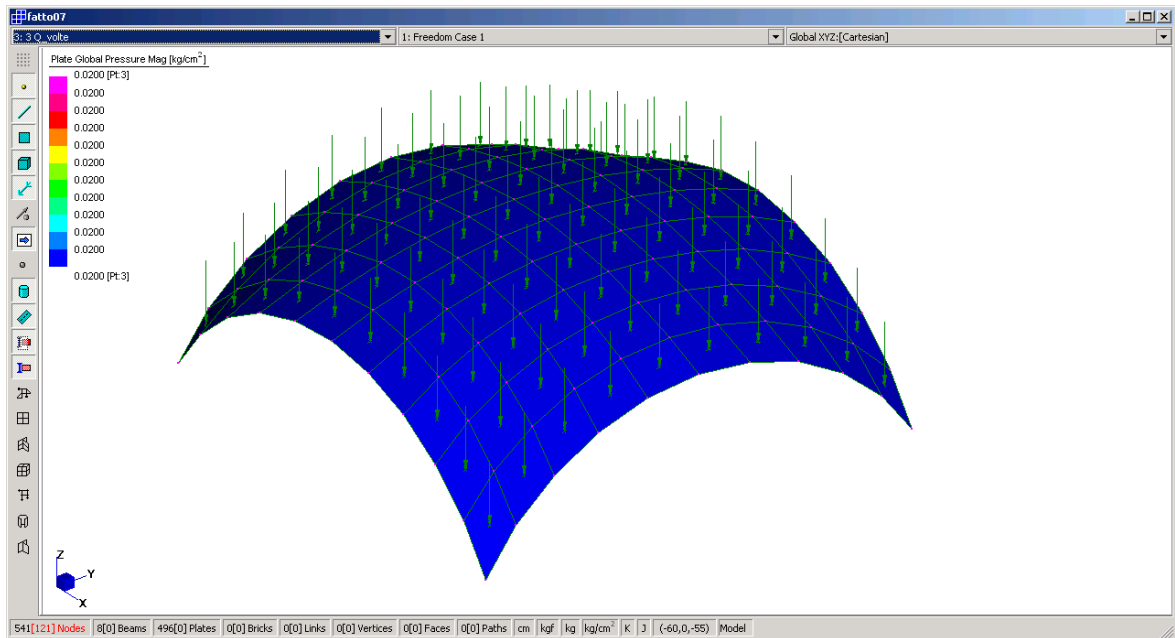
Nella applicazione pratica il carico viene applicato tenendo conto della altezza di ricoprimento sul punto medio del singolo plate :



ed ammette una risultante pari a 35 083 daN .

Il carico  $Q_{volte,totale}$  afferisce al carico d'esercizio , assunto pari a  $p=200 daN/mq$  , presente su tutta la volta:





ed ammette una risultante  $6.00\text{m} \times 5.90\text{m} \times 200\text{daN/mq} = 7080 \text{ daN}$  .

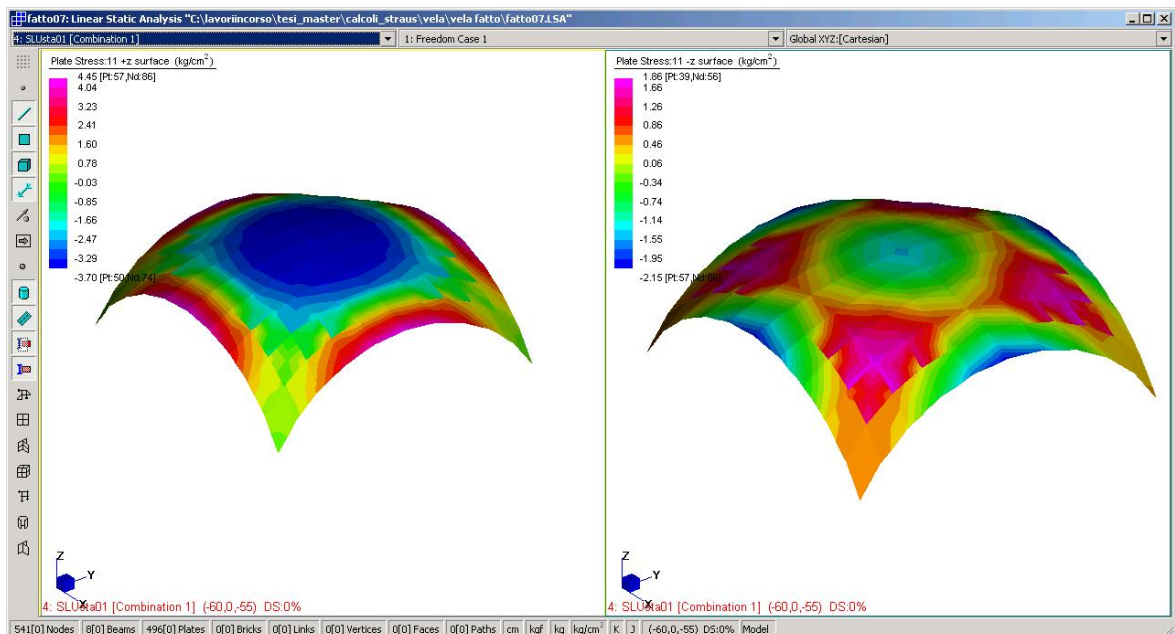
Una considerazione sulla entità della risultante a pieno carico , che si attesta su  $(14320+35083+7080)=56\,483 \text{ daN}$ , che sulla superficie di riferimento  $(6.00 \times 5.90=35.4\text{mq})$  , equivale ad un carico unitario medio di  $1595 \text{ daN/mq}$  .

## 5.2 L'analisi lineare

La prima combinazione di riferimento allo SLU è rappresentata da :

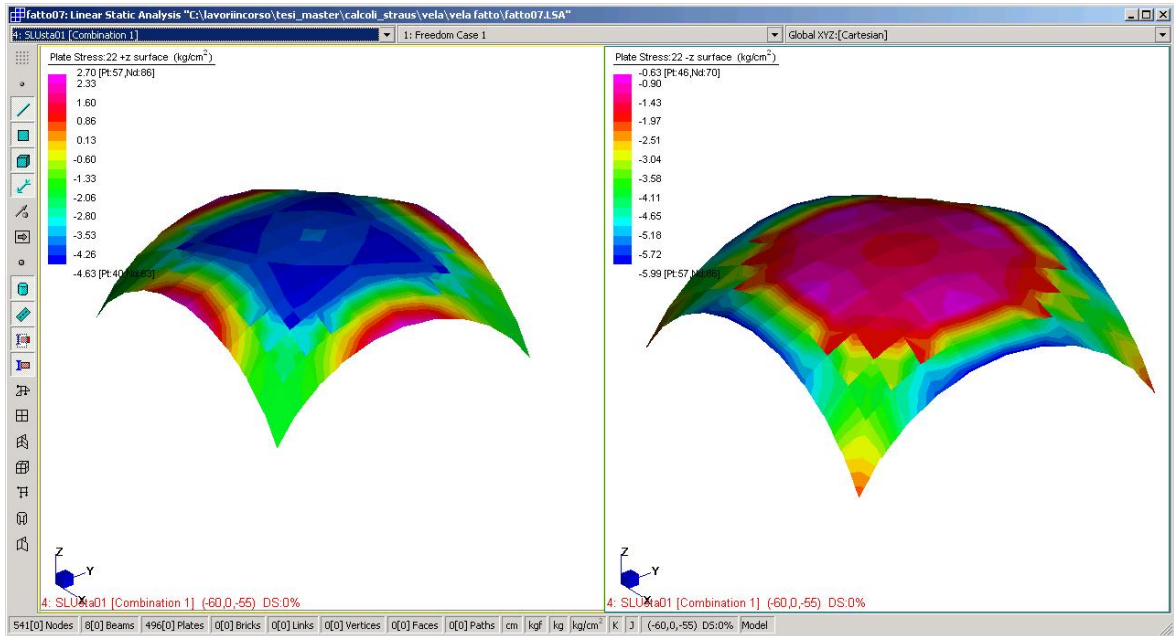
$$\text{SLU1} \quad 1.30 \cdot G_{1\text{volte}} + 1.50 \cdot G_{2\text{volte}} + 1.50 \cdot Q_{\text{volte,totale}}$$

Le tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con picco assoluto di trazione di 4.50 daN/cm<sup>2</sup> , all’attacco dell’estradosso alla chiave dell’arco d’imposta .

Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):

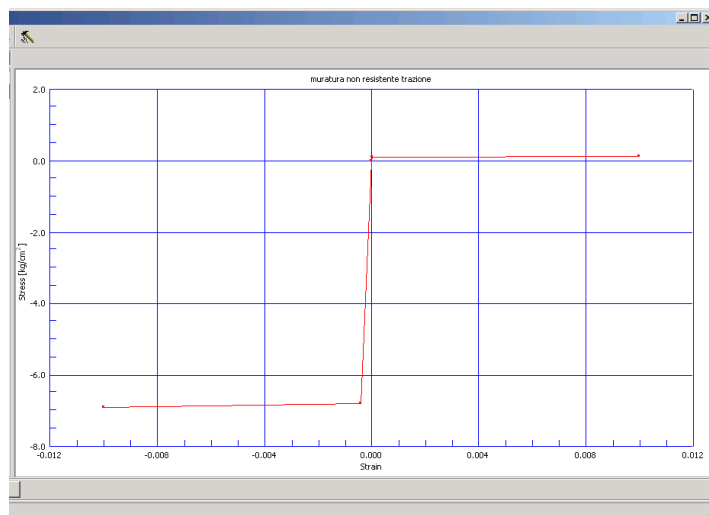


con picco assoluto di compressione di 6.0 daN/cm<sup>2</sup> all’attacco dell’intradosso alla chiave dell’arco d’imposta .

### 5.3 L’analisi in non linearità meccanica

#### 5.3.1. Assunzioni e sviluppi

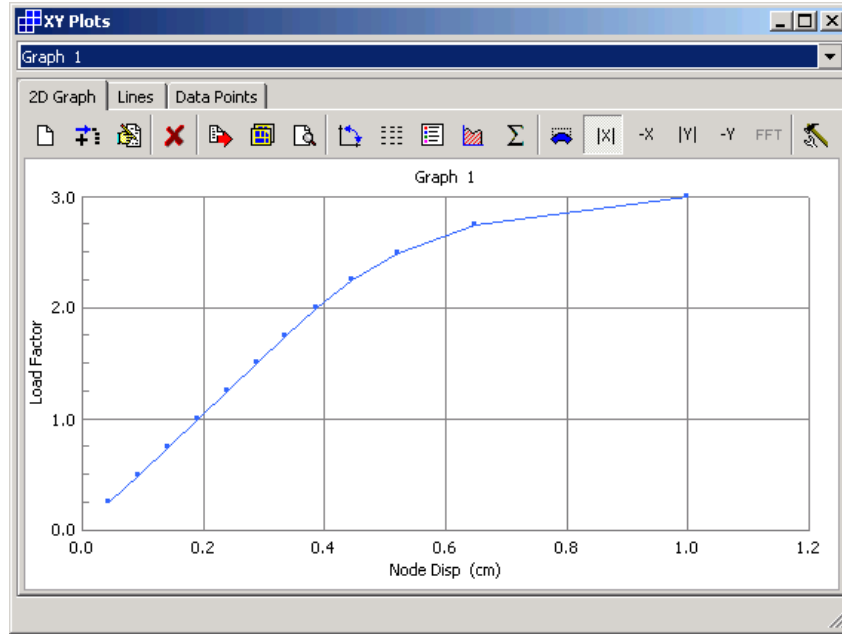
L’analisi viene effettuata con ipotesi di lavoro del tutto coincidenti con quelle assunte nell’analisi della volta a botte ; anche la curva in monoassiale è la stessa:



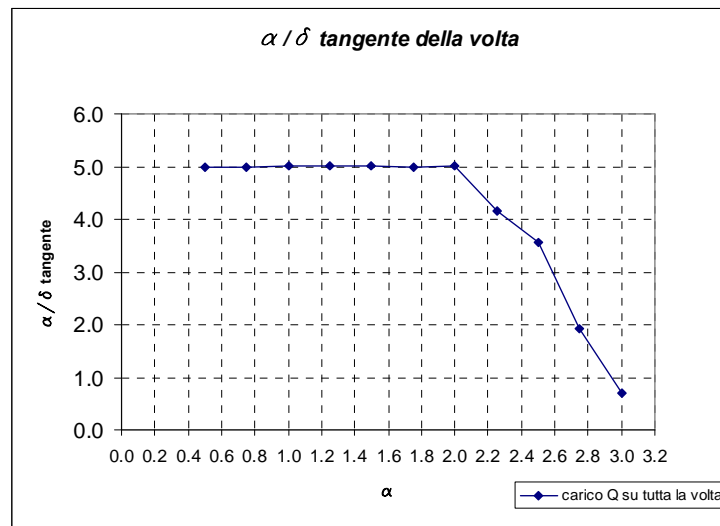
La analisi è svolta, in prima istanza, facendo crescere in maniera proporzionale, i seguenti carichi :

$$G_{1\text{volte}} \quad G_{2\text{volte}} \quad Q_{\text{volte,totale}}$$

Appuntando l'attenzione sul nodo di chiave (in pratica sul punto proiettato delle intersezioni delle due diagonali in pianta) è possibile monitorare l'andamento carico-abbassamento dello stesso al crescere del moltiplicatore dei carichi (unico per tutti) :



Dagli stessi risultati appena ottenuti è possibile mostrarne una espressiva elaborazione in termini di rigidezza tangente (a meno del valore di forza):

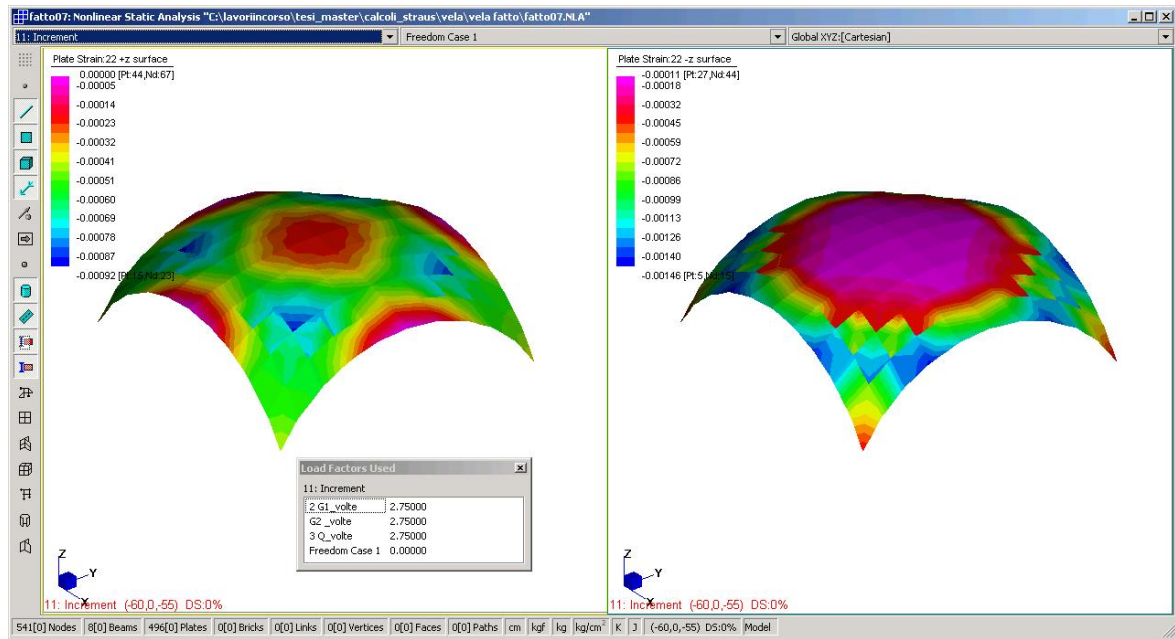


Ignorando quindi le limitazione sulla  $\varepsilon$  in compressione della muratura, e cioè in atri termini operando in comportamento plastico indefinito, il moltiplicatore di collasso si assesta intorno a valori di circa 3.0 .

### 5.3.2. Il controllo delle $\varepsilon$

Anche in questo caso si assume come limite in  $\varepsilon$  a compressione il valore 0.0035 , così come proposto in NTC08, 7.8.3.2.1 in riferimento alle murature armate .

Ebbene, tanto assunto, si riporta la mappatura delle  $\varepsilon$  in compressione all'estradosso (a sx) e all'intradosso (a dx) per lo step  $\alpha=2.75$ , provvisoriamente assunto come valore di collasso:



rilevandosi un valore ancora inferiore al limite .

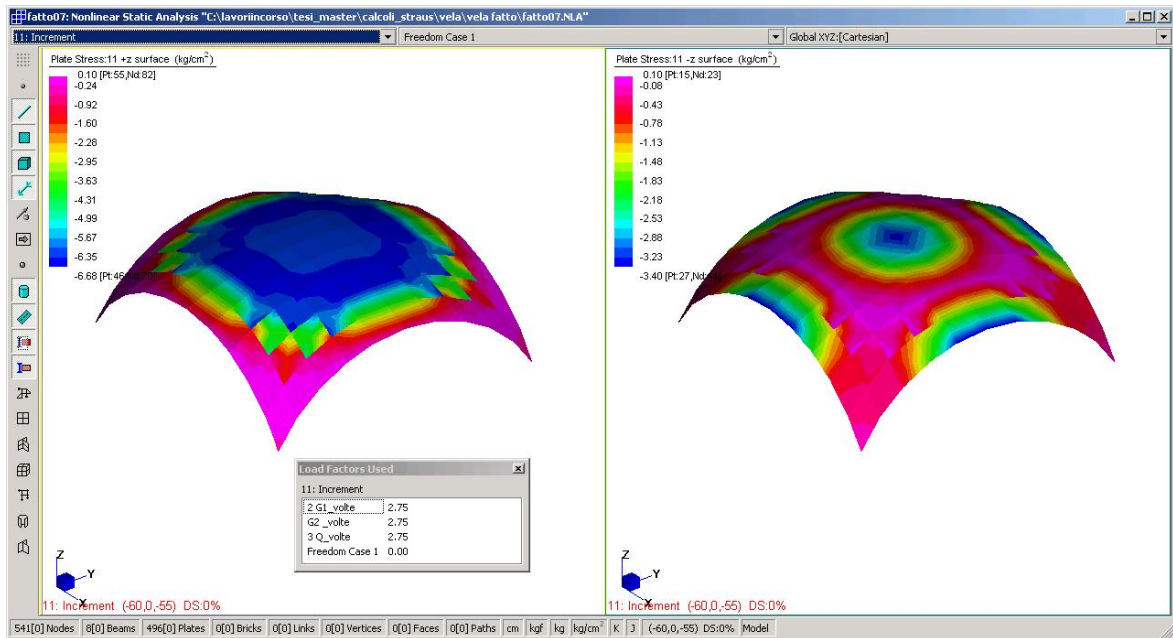
Ne deriva allora che la curva possa considerarsi, in prudenza, bloccata a  $\alpha_{coll}=2.75$ .

Ancora una volta una erosione rispetto al valore derivante da *limit-design*, con passaggio da 3 a 2.75 .

### 5.3.3. L'assetto limite

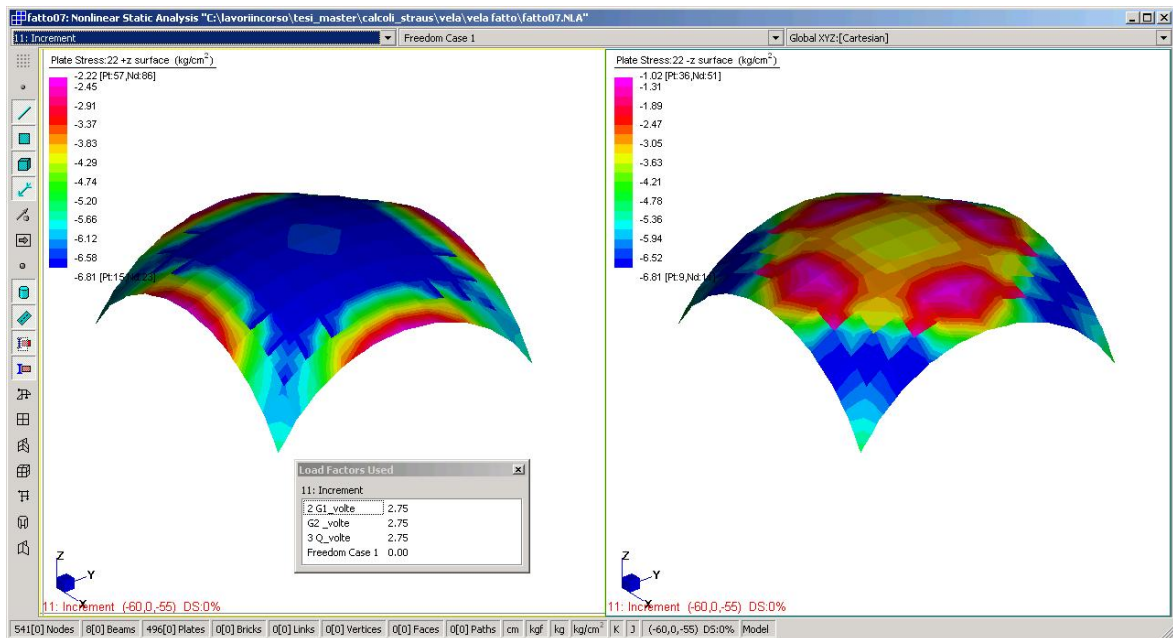
Considerando che a pieno carico ( $\alpha=1.00$ )il carico medio è pari a 1595 daN/mq, può stabilirsi che al collasso esso diviene  $1595*2.75=4380$  daN/mq .

Assumendo lo *step* assunto come limite, cioè  $\alpha= 2.75$ , è possibile evidenziare la distribuzione delle tensioni principali massime,  $\sigma_{11}$ , (a sx estradosso, a dx intradosso):



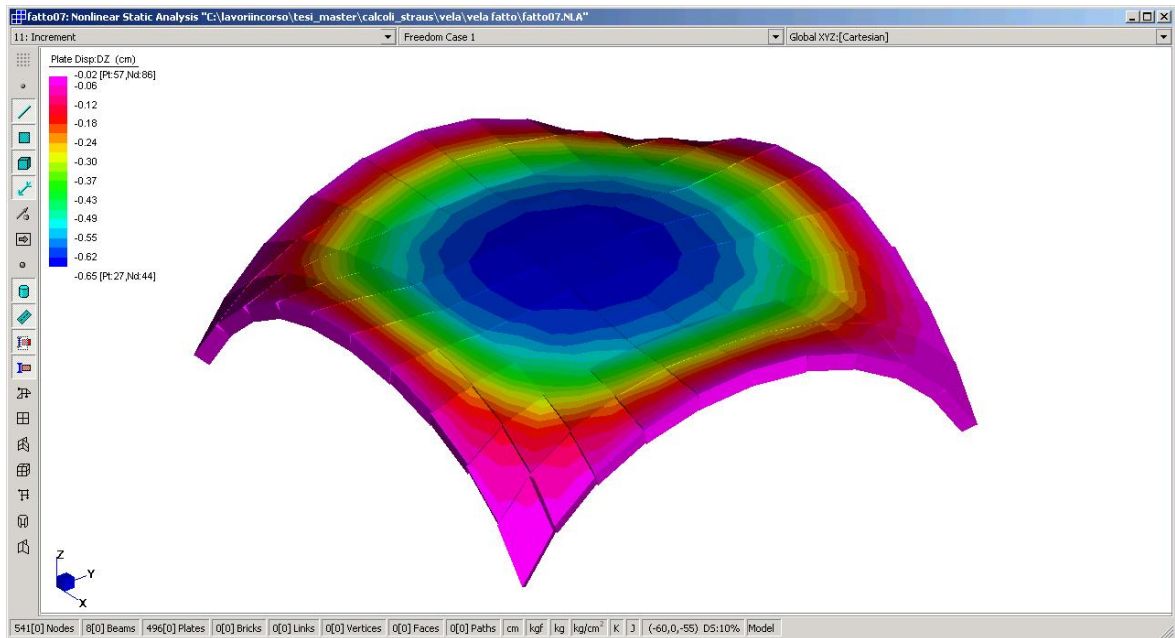
da cui risulta l'ampia zona alle unghie in estradosso .

Le tensioni principali minime,  $\sigma_{22}$ , sono così distribuite (a sx estradosso, a dx intradosso):



con l'ampia zona in chiave all'estradosso e alle unghie in intradosso , a tensione di compressione molto prossima al limite di 6.90 daN/cm<sup>2</sup> .

Sempre all'ultimo *step* assunto, e' possibile cogliere la deformazione complessiva della volta, con la tipica forma a catino :

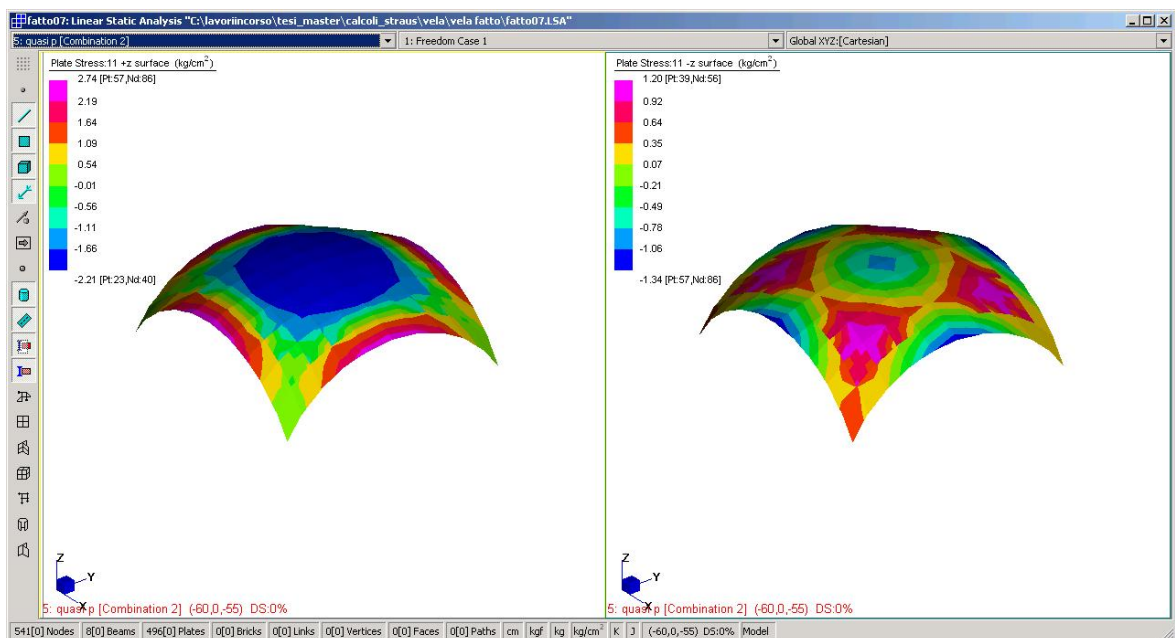


### 5.4 E le fessurazioni?

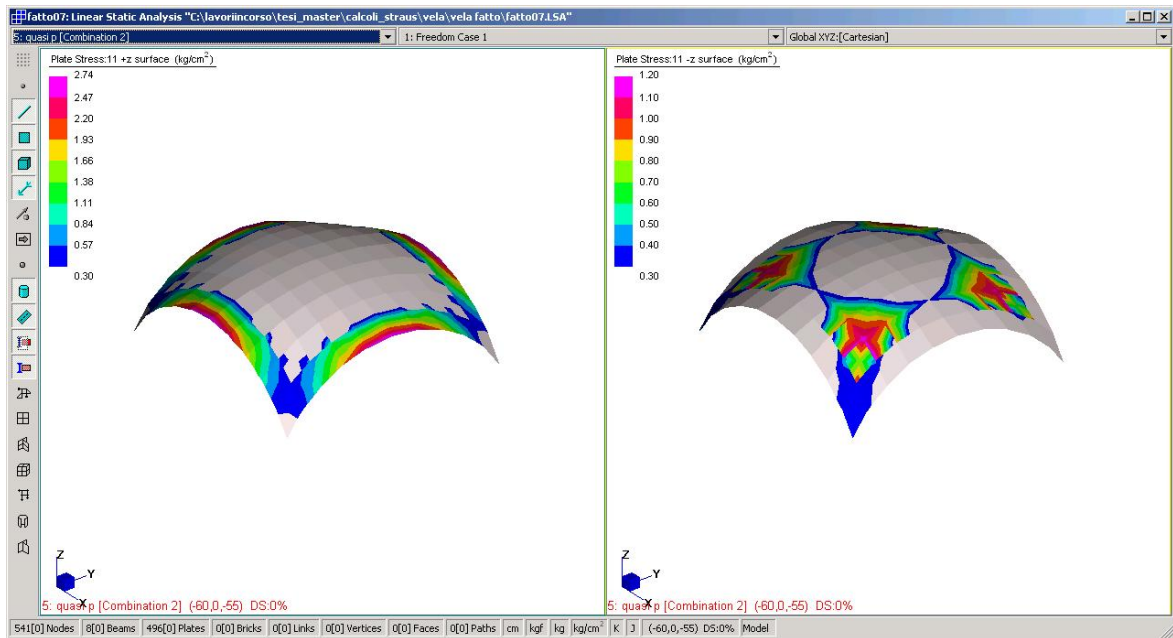
Per gli stessi motivi addotti a proposito della volta a botte, si riprendono i risultati della lineare, ed in particolare assumendo la comb.

$$SLE \text{ q.p.} \quad 1.00 * G_{1\text{volte}} + 1.00 * G_{2\text{volte}} + 0.30 * Q_{\text{volte}}$$

Un primo elemento di giudizio è legato alla mappatura delle tensioni principali di trazione  $\sigma_{11}$  ( a sx l'estradosso, a dx l'intradosso):

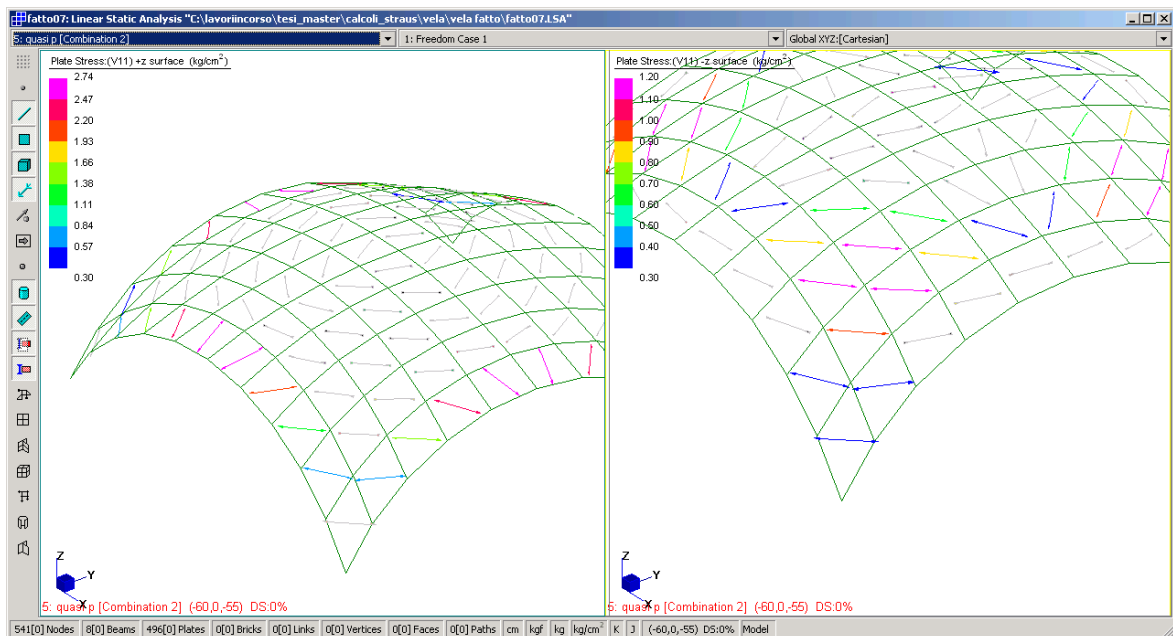


seguito dalle zone in cui il valore di trazione supera quello nominale (0.3 daN/cmq):



da cui è possibile ricavare che all'estradosso il livello massimo si attinge e (nel modello lineare si supera ampiamente) laddove la volta si innesta sugli archi, nella zona di chiave di questi ultimi e –in piena dualità- all'intradosso nelle delle unghie, che infatti frequentemente si presentano lesionate proprio lungo le diagonali .

Ancora una volta va rilevato che i risultati possono essere considerati validi solo nella misura in cui forniscono il primo formarsi della fessurazione, poiché da questo momento in poi le fessurazioni stesse inducono un comportamento progressivamente sempre piu' non lineare : dettagliando le isostatiche di trazione, è possibile formarsi una idea piu' esplicita delle linee di originaria frattura (sempre a sx all'estradosso e a dx all'intradosso):



Possono qui ripetersi le stesse considerazioni già svolte in sede d'analisi delle fessurazioni della volta a botte , valendo tutte le procedure ivi indicate e che qui vengono confermate .

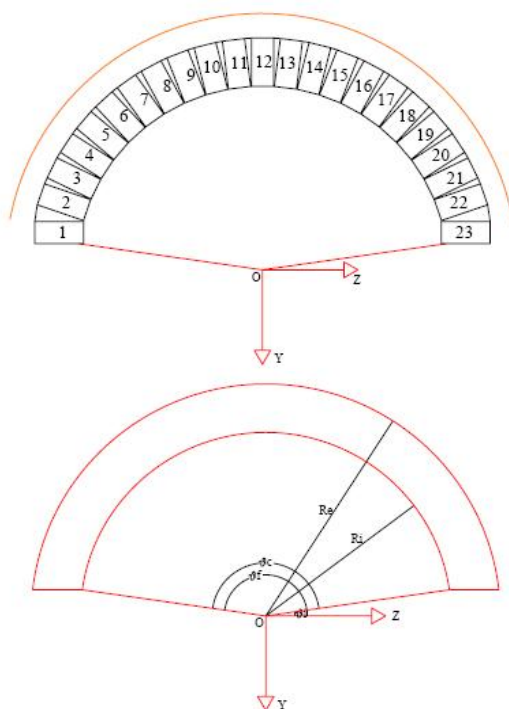
## 6. COMPARAZIONE CON INDAGINI DI BIBLIOGRAFIA

### 6.1 Un arco di riferimento

#### 6.1.1. Premessa

Ci si riferisce ad una struttura sperimentale oggetto di studio presso l'Università di Cassino, a cura dell'ing. Maria Ricamato [7].

Si tratta di un arco di prova in laterizio e malta bastarda pozzolanica, a sagoma circolare, con sezione trasversale  $b=25\text{cm}$   $h=12\text{cm}$ , del quale vengono fornite le caratteristiche così come riportate nella documentazione di riferimento :



$$R_{\text{ext}} = 576.07\text{mm}$$

$$R_{\text{int}} = 456.07\text{mm}$$

$$R_G = \frac{R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}}{2}$$

$$\theta_i = 8^\circ, \theta_f = 172^\circ$$

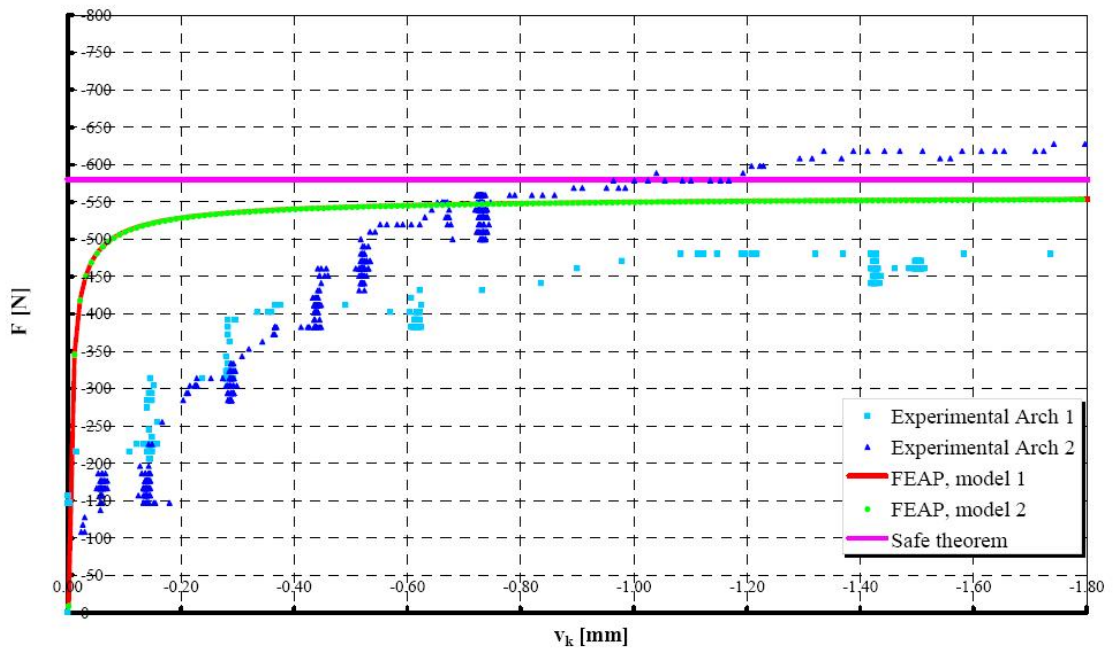
$$\theta_C = \theta_f - \theta_i$$



I carichi agenti sull'arco sono sia il peso proprio, fisso e invariabile, e sia una forza verticale applicata in una zona appena a dx della chiave, con una eccentricità di sistema probabilmente voluta per analizzare comportamenti a collasso di tipo non simmetrico .



La struttura , arco 2, sottoposta ai carichi, è stata monitorata in corrispondenza della zona di applicazione del carico con attuatore, misurando gli abbassamenti progressivi.

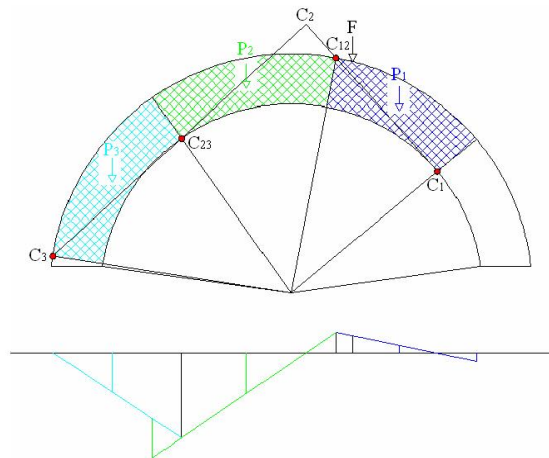


ottenendo la curva sperimentale Arch2 .

Sul modello geometrico corrispondente è stata eseguita:

- una doppia modellazione numerica , denominata FEAP
- una applicazione di calcolo a rottura con teorema cinematico, assumendo la ipotesi di infinita resistenza a compressione e *no tension* (in altri termini cerniera al lembo compresso).

Con riferimento a quest'ultima si è fatta variare la posizione delle 4 cerniere plastiche, considerando poi quella a cui fosse associato il moltiplicatore minimo, ottenendo  $F_{lim}=55$  daN , con la seguente distribuzione:



Dall'esame del diagramma riassuntivo è possibile trarre le seguenti considerazioni:

- il modulo E secante utilizzato nelle analisi numeriche è certamente superiore a quello che la muratura esibisce in realtà;
- vi è sostanziale coincidenza fra moltiplicatore derivante dal calcolo al passo e quello derivante da limit-design ;
- i valori sperimentali di moltiplicatore si spingono fino a circa 62 daN.

In capo al percorso sperimentale, si sono effettuate prove di caratterizzazione degli elementi costituenti, blocchi e malta, ottenendo, in particolare i seguenti risultati.

*laterizio*

Sono state effettuate prove di resistenza su 6 cubi di lato 5.5cm, ottenuti per taglio del mattone normalizzato, ottenendo un valor medio di 385 daN/cm<sup>2</sup> ed un valor caratteristico di 149 daN/cm<sup>2</sup>.

Average compressive strength [N/mm <sup>2</sup> ]	Standard deviation [N/mm <sup>2</sup> ]	Variation coefficient	Characteristic compressive strength (f <sub>bk</sub> ) [N/mm <sup>2</sup> ]
38.5	7.47	0.23	14.9

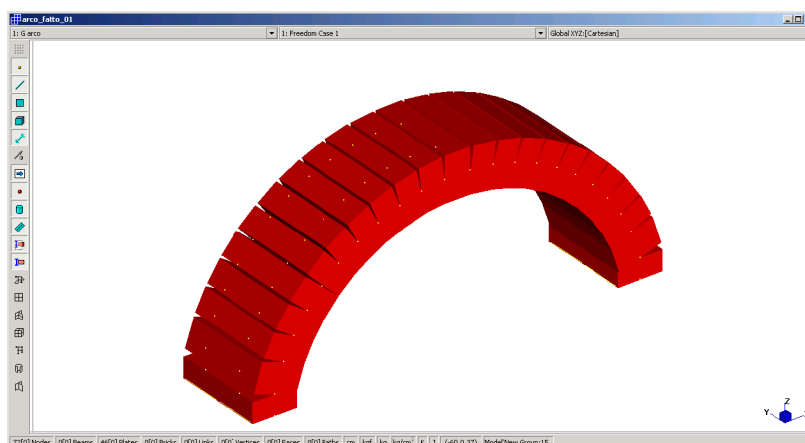
*malta*

Sono state effettuate prove di resistenza su 3 cubi stagionati a 28gg, ottenendo :

Specimen	1		2		3	
Size [cm]	4x4x16		4x4x16		4x4x16	
Weigth [g]	432.4		430.6		430.5	
Compressive strength [N/mm <sup>2</sup> ]	4.8094	4.7038	4.7438	4.7675	4.6219	4.7975

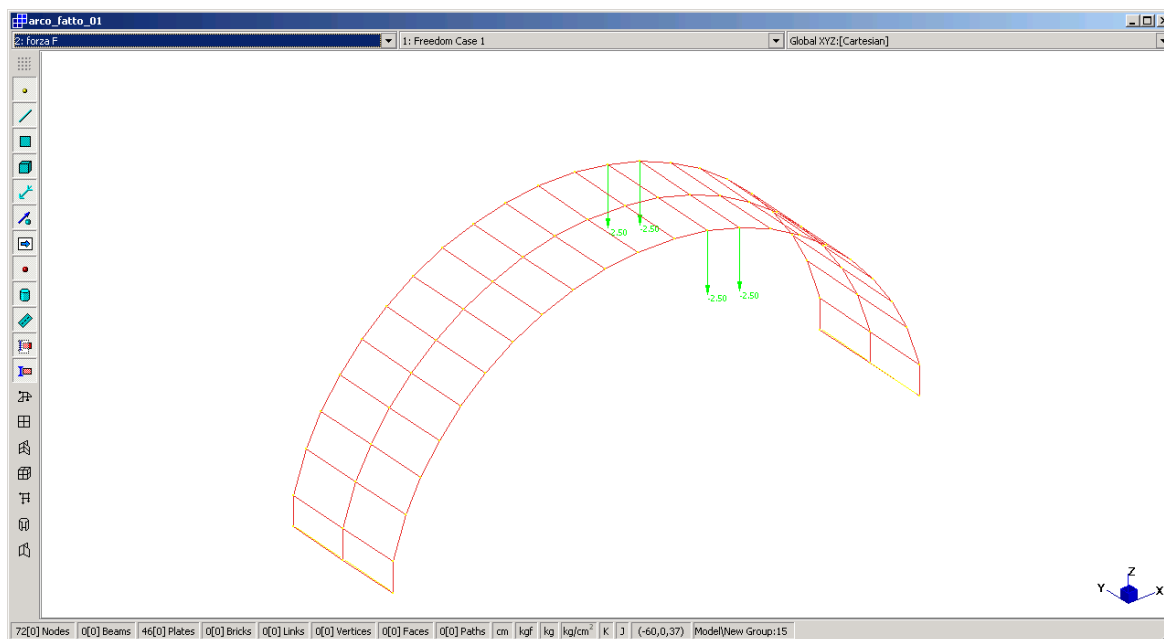
**6.1.2. Articolazione del confronto**

Si è proceduto anzitutto alla modellazione dell'arco, effettuata con elementi *plate* disposti in modo tale che il loro spessore fosse pari all'altezza della sezione trasversale dell'arco (12cm) . Per quanto questa disposizione sia nel caso particolare abbastanza infelice, la si è preferita perché perfettamente coerente con quella utilizzata nel corpo dell'intero studio :



Per la condizione elementare da peso proprio si è proceduto con calcolo automatico, basato su peso specifico di 1800 daN/mc .

Per la condizione elementare da carico esterno si è proceduto applicando 4 forze, ciascuna da 2.5daN, nei nodi evidenziati , per un totale di 10daN :



La modellazione della muratura è stata effettuata con una curva in monoassiale di riferimento e assumendo il criterio di Rankine, così come proposto in tutto il presente studio .

Nel lavoro di riferimento non sono presenti prove sull'assieme blocchetto-malta , sicché si è deciso di seguire l'approccio normativo in NTC'08 , grazie al quale è possibile caratterizzare la resistenza della muratura mediante la conoscenza dei parametri meccanici dei costituenti.

Ed allora per  $f_{bk}=149$  daN/cm<sup>2</sup> ed  $f_m=48$ daN/cm<sup>2</sup> (malta M5) si possono assumere i seguenti valori:

$$f_k=60 \text{ daN/cm}^2 \qquad f_{v,k0}=2 \text{ daN/cm}^2$$

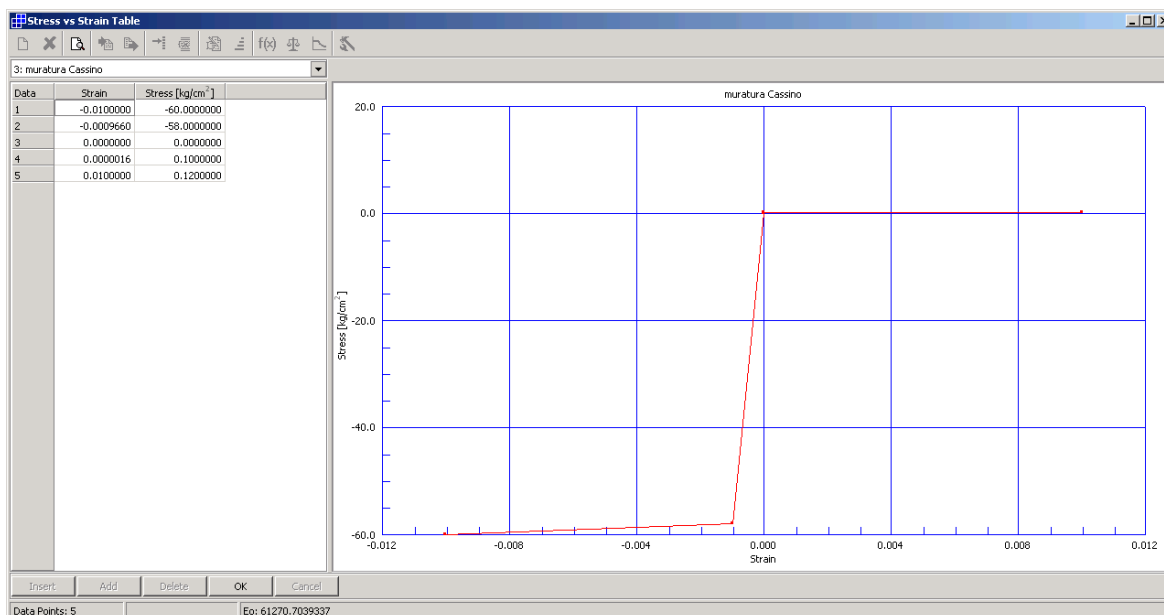
ed ancora :

$$E=1000f_k=60000 \text{ daN/cm}^2$$

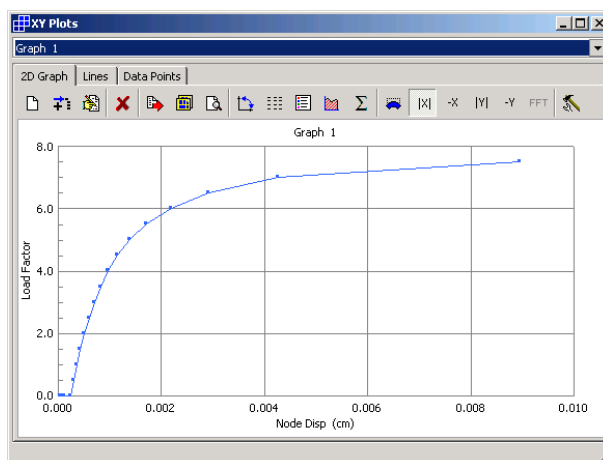
$$G=0.40 \cdot E=24000 \text{ daN/cm}^2$$

Nello spirito della formulazione proposta in questo lavoro, la tensione di trazione si considera presente, e tuttavia a valori esclusivamente “numerici”. Anche in questo caso si assume un valore di circa 0.10 daN/cm<sup>2</sup> .

Ne deriva che la curva monoassiale sia da porsi nella forma:

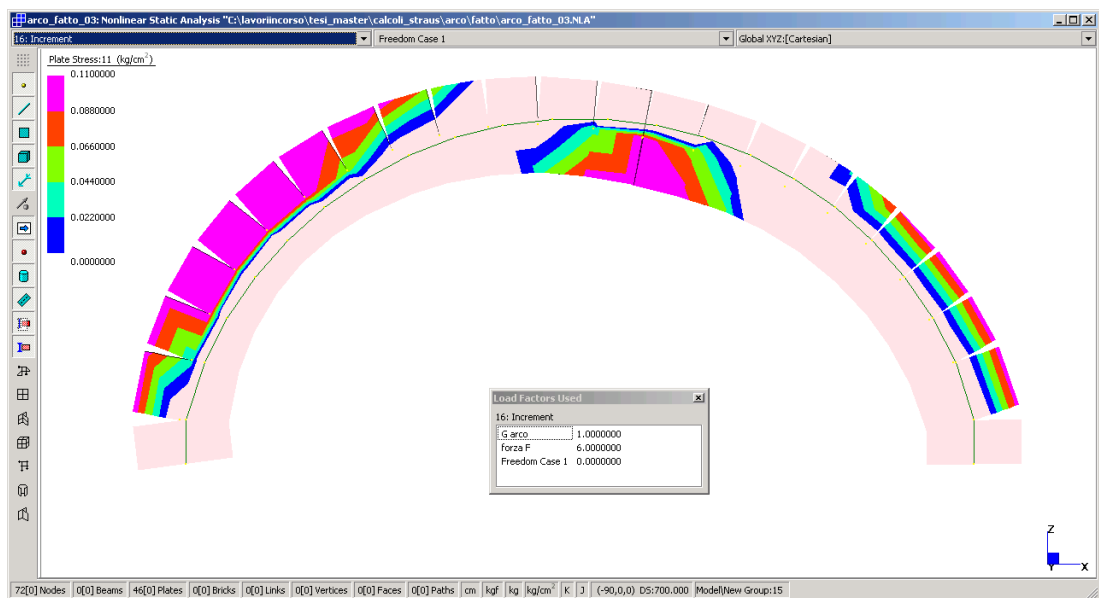
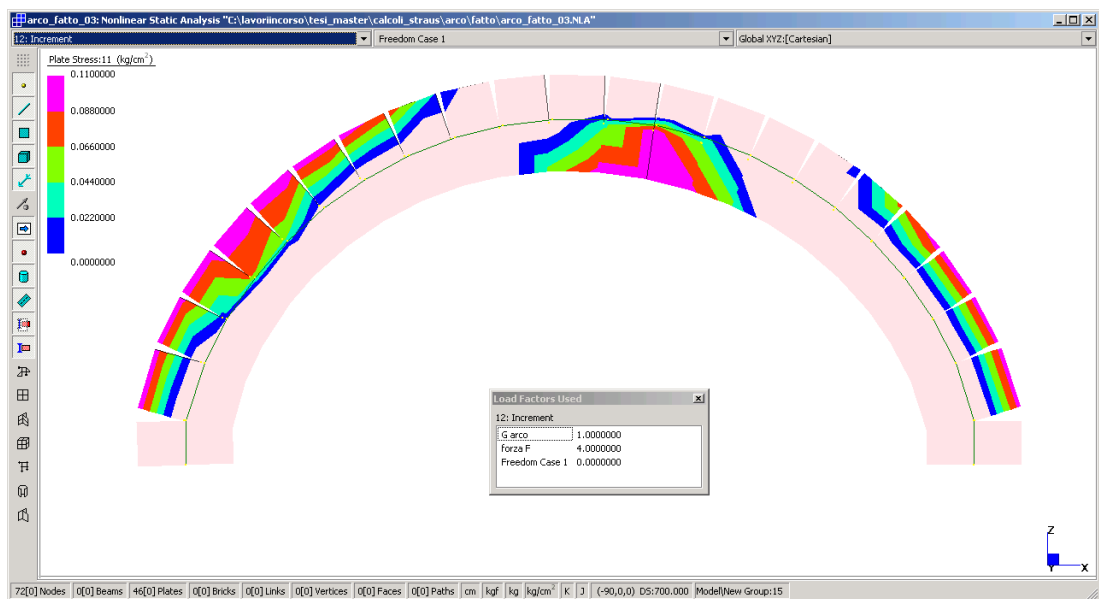
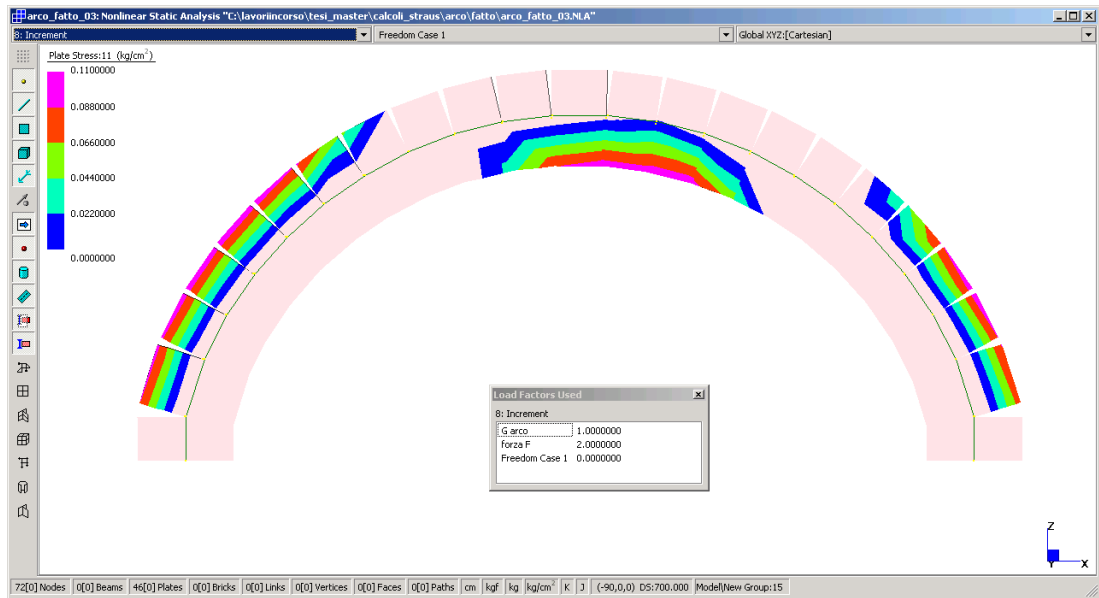


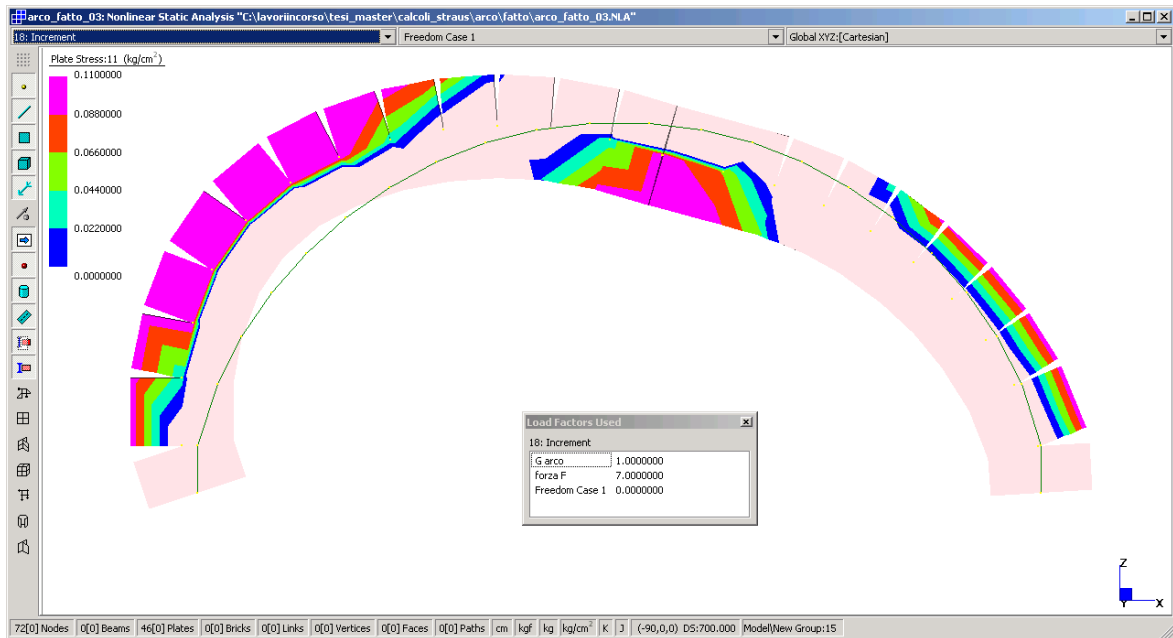
Effettuando l'analisi non lineare per meccanica, con procedura solita, si è individuata la seguente curva carico-abbassamento:



con valore di ginocchio in prossimità di  $\alpha_{coll}=7$  circa, alquanto più elevato di quello ottenuto nel lavoro di riferimento, 5.5, ma più prossimo al comportamento reale dell'arco in sperimentazione: ed infatti riguardando il diagramma comparativo in riferimento, si osserva una gran messe di punti sperimentali per l'arco 2 che si attestano con ordinate di circa 620N=62 daN,  $\alpha=6.2$ .

E' possibile cogliere l'evoluzione delle zone tese, procedendo per quattro step diversi, rispettivamente pari a 2, 4, 6 e 7:





In definitiva :

- l'analisi numerica ha evidenziato un moltiplicatore di crisi molto prossimo a quello sperimentale (7 contro 6.2) ;
- l'analisi numerica mostra un chiaro indirizzo verso un cinematismo coincidente con quello sperimentale visibile nella foto (il lieve disturbo nella zona d'imposta sx e' legato al vincolo utilizzato al concio 1 nella pratica sperimentale) ;
- entrambe le analisi numeriche, sia quella svolta in questo lavoro che in quello di riferimento, mostrano un comportamento più rigido di quello che la sperimentazione indica. Probabilmente in ciò gioca un ruolo importante lo spessore fortemente variabile dei giunti di malta, che accentua una deformazione a taglio dei comenti stessi, non colta dalla previsione normativa dei moduli in funzione delle mere caratteristiche meccaniche dei costituenti.

## 7. CONCLUSIONI

Nell'ambito specialistico della Ingegneria Forense, il nesso fra causa ed evento non può essere semplicemente supposto, o assunto come manifestazione di sapere astratto o ancora meno in veste di postulato; esso va invece scientificamente provato -nelle condizioni particolari che connaturano il caso d'indagine- pena la censura della consulenza o della perizia, con il conseguente scardinamento di ogni standard probatorio. Solo il supporto scientifico di una teoria, correttamente applicata dal tecnico nel caso pratico, può conferire al filo logico da egli tenuto, un ragionevole tasso di affidabilità, e quindi dare vigore alle conclusioni.

Partendo da queste considerazioni di ordine generale si analizzano le particolarizzazioni al caso di Dissesti che coinvolgono le strutture voltate in muratura, quali elementi ricorrenti nelle tecniche costruttive del passato.

Il percorso di lavoro prefissato è sostanzialmente riassumibile nel ricercare se vi fossero condizioni di operatività, in ambito di pratica tecnica, nell'analisi di strutture voltate in muratura con tecnica *step by step*, portando in conto i principali elementi più significativi che definiscono il comportamento di queste singolari strutture.

Le analisi svolte, in uno con i confronti operati, permettono di rispondere affermativamente al quesito.

La procedura utilizzata, in forma di robusta analisi al passo in controllo di forze, con validazione a posteriori in termini di deformazioni massime di compressione, è stata applicata a due configurazioni geometriche diverse, la volta a botte e quella a vela, con la prima analizzata sia in configurazione nuda che in doppia tipologia di consolidamento (tradizionale con frenelli e innovativa, con FRP).

Per ognuno dei modelli si sono individuati gli elementi caratterizzanti la fase iniziale, in comportamento elastico, quali deformate, mappatura delle tensioni principali max e min sia all'intradosso che all'estradosso. Superato il guado della fessurazione, si esamina l'evoluzione del sistema strutturale con la progressiva erosione delle zone inerti di muratura, e la conseguente variazione di stato tensionale nelle zone maggiormente stressate. Grazie alle visualizzazioni delle deformate, è stato possibile cogliere il meccanismo di incipiente collasso, evidenziandone alcune particolarità.

È stato possibile monitorare gli effetti raggiunti con i due tipi di consolidamento, confrontando le curve di capacità, confermandosi in particolare la assoluta efficacia

dell'intervento tradizionale mediante frenelli, anch'essi murari, con copertura piana dei campi fra essi definiti (rinfiango cellulare) .

L'intervento di consolidamento in FRP, dopo una breve disamina tecnologica, e' stato simulato mediante elementi asta non reagenti a compressione, connessi a *link* alla sottostante struttura voltata . Si segue la progressiva inserzione delle fasce, con il conseguente miglioramento delle condizioni generali di sicurezza della volta, ottenuto grazie alla azione di contenimento delle cerniere plastiche alle reni.

Nella fase conclusiva del lavoro si e' affrontata –a costituire valido supporto scientifico– una comparazione fra risultati numerici e sperimentali disponibili in bibliografia con quelli desumibili dalla procedura al passo utilizzata: si sono ottenuti riscontri favorevoli e concordi alla sperimentazione, in particolar modo per il moltiplicatore di collasso e per l'associato meccanismo .



## **8. BIBLIOGRAFIA**

- 1) Mastrodicasa S. (1980) *Dissesti Statici delle Strutture Edilizie*, Hoepli Milano
- 2) Franciosi V. (1962). *Scienza delle Costruzioni. Vol.IV Calcolo a Rottura*, Liguori, Napoli
- 3) Canzio G. (2005). *Prova scientifica, ricerca della verità e decisione giudiziaria nel processo penale*, Riv. trim.dir. e proc. civ. quaderno 8
- 4) Benvenuto E.(1981). *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, Firenze
- 5) Locascio M. (1969). *Una estensione del teorema di Hodge* . Liguori, Napoli
- 6) Augenti N. (2004). *Il calcolo sismico degli edifici in muratura*, UTET, Torino.
- 7) Ricamato M. (2007). *Numerical and experimental analysis of masonry arches strengthened with FRP materials* .